

หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน

สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

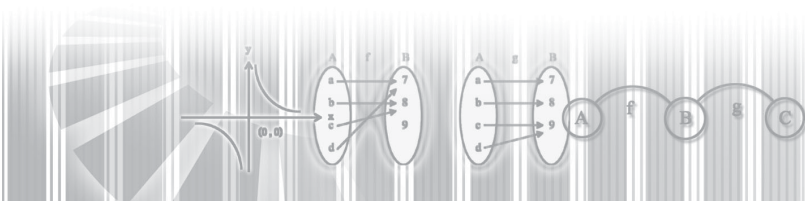


**โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษากาญจนบุรี**

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หลักสูตรระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
กรุงเทพฯ : 2550
81 หน้า
ISBN 978-974-559-127-1
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

**แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน หลักสูตรระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความ
สามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

สิ่งพิมพ์ สกศ. อันดับที่ 17 /2551
พิมพ์ครั้งที่ 1 มกราคม 2551
จำนวน 1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่ สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
 99/20 ถนนสุขุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
 โทร. 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530
 โทรสาร. 0-2243-1129, 0-2668-7329
 Web site: [http:// www.onec.go.th](http://www.onec.go.th) และ www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์ บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด
 580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1
 ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230
 โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753



คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

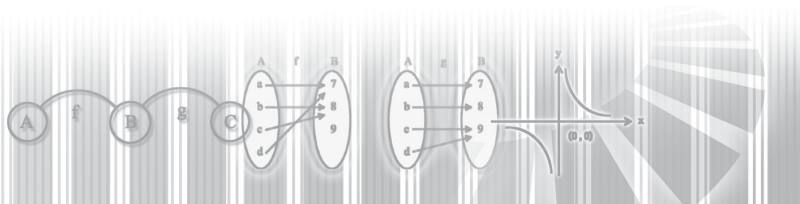
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลงเหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ่งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรรักษามาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ในหลักสูตรระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน จากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุนรองศาสตราจารย์อารีสา รัตนเพ็ชร และคณะจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

0159 A

(นายออรุณ จันทวานิช)
เลขาธิการสภาการศึกษา

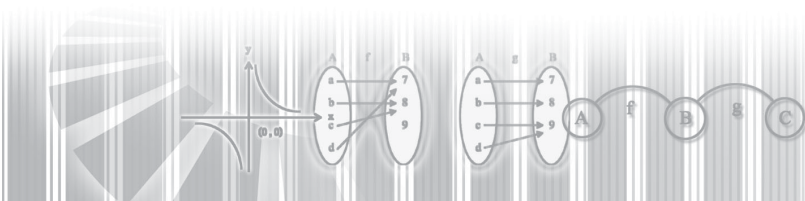


คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษา ระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตร การศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

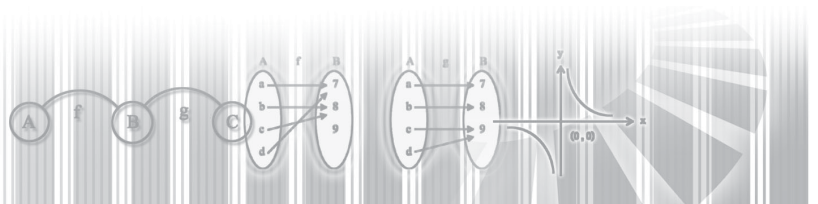
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขึ้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนรู้ในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน



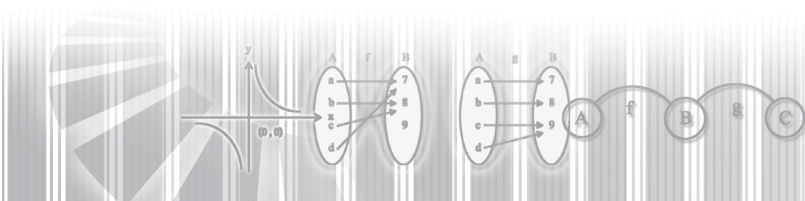
**ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**

ระดับ	เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้	
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		7. ทรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึก และมหาวิทยาลัยราชวรุช
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวรุช
รวม		200		
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวิทยาลัยราชวรุช
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินทิเกรต	40	โรงเรียนจุฬาราชวิทยาลัย จ.สตูล
		รวม		200
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		<ul style="list-style-type: none"> ▪ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ) ▪ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ) ▪ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ) 		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม		100		

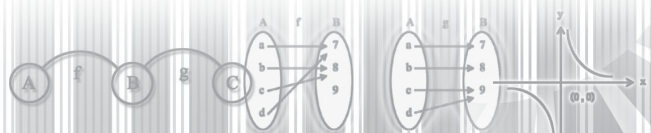


สารบัญ

เรื่อง	หน้า
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	
เรื่อง คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน	1
ใบความรู้ที่ 1	3
ใบกิจกรรมที่ 1	5
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2	
เรื่อง ความสัมพันธ์	6
ใบความรู้ที่ 2	8
ใบกิจกรรมที่ 2	12
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3	
เรื่อง โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์	13
ใบความรู้ที่ 3	15
ใบกิจกรรมที่ 3	19
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4	
เรื่อง อินเวอร์สของความสัมพันธ์	20
ใบความรู้ที่ 4	22
ใบกิจกรรมที่ 4	26
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5	
เรื่อง กราฟของความสัมพันธ์	27
ใบความรู้ที่ 5	29
ใบกิจกรรมที่ 5	36
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	
เรื่อง ความหมายของฟังก์ชัน	39
ใบความรู้ที่ 6	41
ใบกิจกรรมที่ 6	43
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	
เรื่อง ลักษณะของฟังก์ชัน	44
ใบความรู้ที่ 7	47
ใบกิจกรรมที่ 7	51



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8	
เรื่อง ฟังก์ชันประกอบ	52
ใบความรู้ที่ 8	55
ใบกิจกรรมที่ 8	56
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9	
เรื่อง ฟังก์ชันอินเวอร์ส	57
ใบความรู้ที่ 9	60
ใบกิจกรรมที่ 9	64
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10	
เรื่อง พีชคณิตของฟังก์ชัน	66
ใบความรู้ที่ 10	69
ใบกิจกรรมที่ 10	72
โจทย์เสริมทักษะ	73



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง คู่อันดับและผลคูณคาร์ทีเซียน
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถหาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- เขียนผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตที่กำหนดให้ได้
- บอกจำนวนสมาชิกของเซตที่เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซตที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

- ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ คือเซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$ เซต $A \times B$ เปรียบได้กับเอกภพสัมพัทธ์ของเซตของความสัมพันธ์
- ความสัมพันธ์จาก A ไป B คือสับเซตของ $A \times B$ สิ่งที่สำคัญในการกำหนดความสัมพันธ์คือ กฎในการจับคู่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์
- การศึกษาความสัมพันธ์ใดก็ตาม ต้องสนใจขอบเขตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับในความสัมพันธ์ และขอบเขตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับในความสัมพันธ์

3. เนื้อหาสาระ

คู่อันดับ(Ordered pairs) หมายถึงการจับคู่สิ่งของสองสิ่งโดยถือลำดับเป็นสำคัญ

ถ้า a, b เป็นสิ่งของสองสิ่ง คู่อันดับ a, b เขียนแทนด้วย (a, b)

เรียก a ว่าสมาชิกตัวหน้า และเรียก b ว่าสมาชิกตัวหลัง

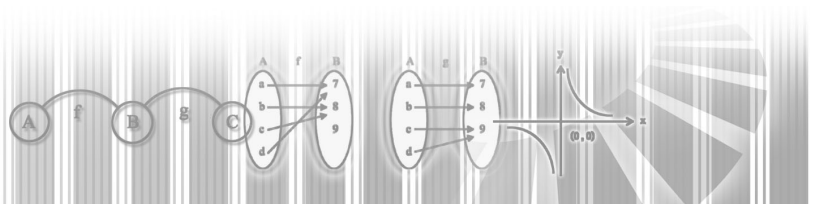
บทนิยาม การเท่ากันของคู่อันดับ

$$(x, y) = (a, b) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = a \text{ และ } y = b$$

บทนิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b)

ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B เขียนแทนด้วย $A \times B$



4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างการจับคู่ระหว่างสิ่งสองสิ่งทีพบในชีวิตประจำวันแล้วเขียนตัวอย่างนั้นในวงเล็บ (...) โดยให้ใช้เครื่องหมาย, ระหว่างสิ่งทั้งสองนั้น และบอกนักเรียนว่า นี่คืตัวอย่างของคู่อันดับ
2. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 1
3. นักเรียนและครูช่วยกันสรุปการหาผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตสองเซต
4. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 1

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1
2. ใบกิจกรรมที่ 1
3. ห้องสมุดโรงเรียน

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำใบกิจกรรม
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

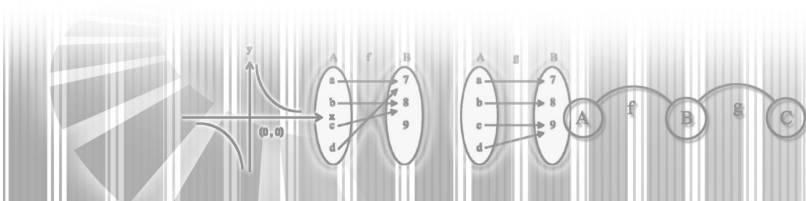
8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 1

ในชีวิตประจำวัน เราต้องเกี่ยวข้องกับการจับคู่ระหว่างสิ่งของ 2 สิ่งอยู่เสมอ เช่น การซื้อสินค้า มีการจับคู่ระหว่างสินค้าที่ซื้อกับราคา ในวิชาคณิตศาสตร์ใช้ “คู่อันดับ” แสดงการจับคู่ระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง

คู่อันดับ

นักเรียนพิจารณาสถานการณ์ต่อไปนี้

บริษัทผลิตบะหมี่สำเร็จรูปยี่ห้อหนึ่ง ตั้งราคาขายบะหมี่สำเร็จรูปซองละ 5 บาท
ถ้าสนใจการจับคู่ระหว่างจำนวนบะหมี่กับราคาบะหมี่ ดังตาราง

จำนวนบะหมี่ (ซอง)	ราคาบะหมี่
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30

การจับคู่ระหว่างจำนวนบะหมี่กับราคา เขียนแสดงในรูปคู่อันดับได้ดังนี้ (1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25), (6,30)

(1,5) อ่านว่า คู่อันดับหนึ่งห้า มี 1 เป็นสมาชิกตัวหน้า และ 5 เป็นสมาชิกตัวหลัง

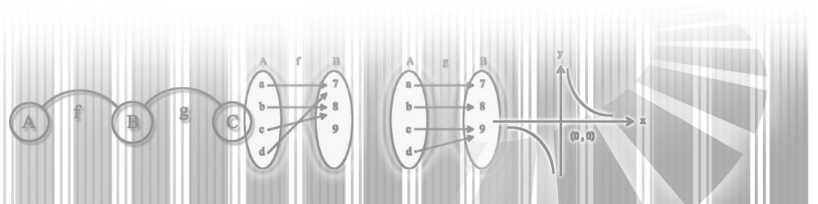
โดยข้อตกลงให้สมาชิกตัวหน้าแทนจำนวนบะหมี่ และสมาชิกตัวหลังแทนราคาบะหมี่ เช่น (4,20) หมายถึงบะหมี่ 4 ซอง ราคา 20 บาท ดังนั้น (4,20) กับ (20,4) ย่อมไม่ใช่คู่อันดับเดียวกัน

สิ่งสำคัญในการเป็นคู่อันดับคือต้องเป็นคู่และมีอันดับ ในวิชาคณิตศาสตร์เมื่อกล่าวถึงคู่อันดับในกรณีทั่วไปใช้สัญลักษณ์ (x, y) โดย x เป็นสมาชิกตัวหน้า และ y เป็นสมาชิกตัวหลัง

ถ้า $a \neq b$ แล้ว (a, b) และ (b, a) ไม่เป็นคู่อันดับเดียวกัน

คู่อันดับสองคู่จะเท่ากัน เป็นไปตามบทนิยามดังนี้

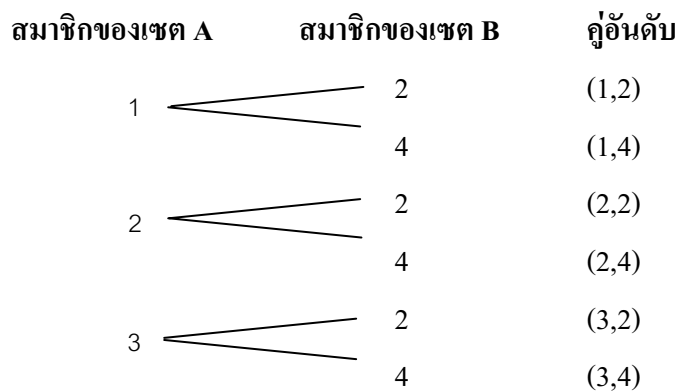
$(x, y) = (a, b)$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ และ $y = b$



ผลคูณคาร์ทีเซียน

ให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{2,4\}$

ถ้าเขียนคู่อันดับ โดยให้สมาชิกตัวหน้าเป็นสมาชิกของ A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของ B จะเกิดการจับคู่ได้ทั้งหมด 6 คู่



เซตของคู่อันดับทั้งหมดคือ

$$\{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\}$$

เรียกเซตนี้ว่าผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B

เขียนแทนด้วย $A \times B$

$$\text{นั่นคือ } A \times B = \{(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4)\}$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{2,4\}$

จงเขียน $A \times B, B \times A, A \times A$ และ $B \times B$ แบบแจกแจงสมาชิก

วิธีทำ $A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$

$$\text{ดังนั้น } A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$

$$B \times A = \{(a, b) / a \in B \wedge b \in A\}$$

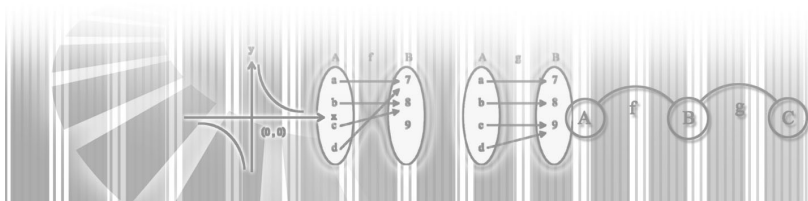
$$\text{ดังนั้น } B \times A = \{(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5)\}$$

$$A \times A = \{(a, b) / a, b \in A\}$$

$$\text{ดังนั้น } A \times A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$$

$$B \times B = \{(a, b) / a, b \in B\}$$

$$\text{ดังนั้น } B \times B = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$$



ใบกิจกรรมที่ 1

1. ให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{10,20\}$ จงหา $A \times B$ และ $B \times A$ และจำนวนสมาชิกของ $A \times B$ และ $B \times A$ เซต $A \times B$ เท่ากับเซต $B \times A$ หรือไม่เพราะเหตุใด

2. ให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ และ $C = \{2,4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้และระบุเซตที่เท่ากัน

2.1 $A \times (B \cap C)$

2.2 $(A \times B) \cap (A \times C)$

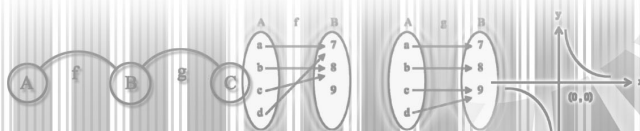
2.3 $A \times (B \cup C)$

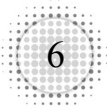
2.4 $(A \times B) \cup (A \times C)$

2.5 $A \times (B - C)$

2.6 $(A \times B) - (A \times C)$

3. ร้านขายข้าวแกงราคาประหยัด มีกับข้าวสองประเภทให้เลือกคือแกงและผัดผัก ถ้าร้านแห่งนี้มีแกง 4 ชนิด คือแกงเขียวหวาน แกงหมูเทโพ แกงซี่เหล็ก แกงส้ม และมีผัดผัก 2 ชนิดคือ ผัดผักบุ้ง ผัดคะน้า ลูกค้าของร้านข้าวแกงจะเลือกสั่งกับข้าว ซึ่งประกอบด้วยแกงและผัดผักอย่างละหนึ่งชนิด ได้กี่แบบ





แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง ความสัมพันธ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถเขียนความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

- เขียนความสัมพันธ์ตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้
- บอกความหมายของความสัมพันธ์จาก A ไป B ได้
- บอกความหมายของความสัมพันธ์ใน A ได้

2. แนวความคิดหลัก

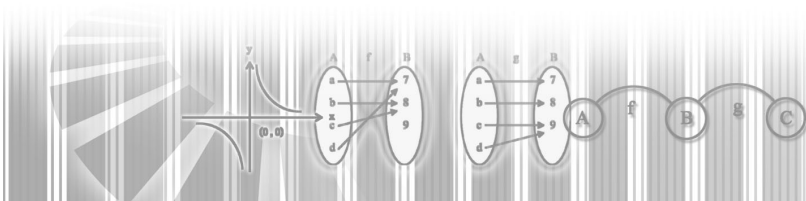
ความสัมพันธ์หมายถึง เซตของคู่อันดับ โดยที่คู่อันดับที่อยู่ในเซตเดียวกันหรือ 2 เซตนั้นจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง

3. เนื้อหาสาระ

- ความสัมพันธ์หมายถึง เซตของคู่อันดับ โดยที่คู่อันดับที่อยู่ในเซตเดียวกันหรือ 2 เซตนั้นจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง
- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$
- r เป็นความสัมพันธ์ใน A ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times A$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูยกตัวอย่างชื่อของนักเรียนสองคนใดๆในห้องเรียนขึ้นมา แล้วให้ช่วยกันพิจารณาหาความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันระหว่างคนทั้งสอง เช่น “เป็นเพื่อนกัน” “สูงกว่า” “เด็กลงกว่า” ฯลฯ จากนั้นยกตัวอย่างเป็นจำนวนสองจำนวน เช่น 4 กับ 2 แล้วให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาว่า จำนวนทั้งสองเกี่ยวข้องกันอย่างไรบ้าง ซึ่งอาจออกมาหลายๆ แบบ เช่น “4 มากกว่า 2” “4 เท่ากับ 2 คูณ 2” หรือ “2 เป็นค่ารากที่สองที่เป็นบวกของ 4”



2. ครูสรุปให้นักเรียนเข้าใจว่า ความสัมพันธ์เกิดจากสิ่งสองสิ่งเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างไร โดยอย่างหนึ่ง และสิ่งสองสิ่งนั้นจะเขียนเป็นคู่อันดับได้เสมอ พร้อมทั้งยกตัวอย่างให้นักเรียนดู

3. ให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y เช่น $x > y$, $y = x + 1$, $y = x^2$ ฯลฯ และให้หาคู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกันภายใต้เงื่อนไขดังกล่าว แล้วครูบอกนักเรียนว่า เซตของคู่อันดับเหล่านั้นเรียกว่า ความสัมพันธ์

4. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และที่เป็นความสัมพันธ์ใน A แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะสำคัญของความสัมพันธ์จาก A ไป B และความสัมพันธ์ใน A

5. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 2

6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 2

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 2
2. ใบกิจกรรมที่ 2
3. ห้องสมุดโรงเรียน

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

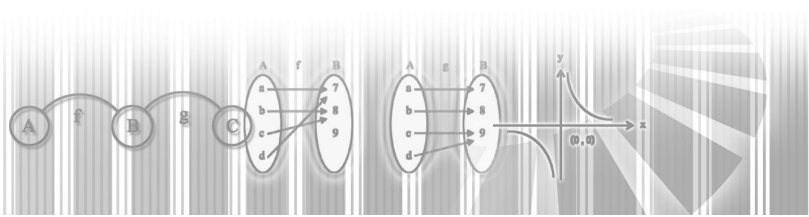
8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 2

บทนิยามของความสัมพันธ์

ในชีวิตประจำวันและในคณิตศาสตร์ เรามักพบสถานการณ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซต 2 เซตอยู่เสมอ เช่น บริษัทรับเหมาปูบล็อกปูถนนแห่งหนึ่ง รับเหมาปูบล็อกถนนด้วยราคา 600 บาท ต่อตารางเมตร สำหรับพื้นที่ 50 ตารางเมตรขึ้นไป สถานการณ์นี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของพื้นที่ที่จะปูบล็อกปูถนนกับค่าใช้จ่ายที่ต้องจ่ายให้ผู้รับเหมา ถ้ากำหนดขนาดพื้นที่ ย่อมระบุค่าใช้จ่ายได้ ดังแสดงในตาราง

พื้นที่(ตารางเมตร)	ค่าใช้จ่าย(บาท)
50	30,000
60	36,000
70	42,000
80	48,000

การจับคู่ระหว่างพื้นที่และค่าใช้จ่ายในการปูบล็อกปูถนน เขียนแสดงในรูปคู่อันดับได้ คือ $(50, 30,000)$, $(60, 36,000)$, $(70, 42,000)$, $(80, 48,000)$

นอกจากนี้ อาจแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่และค่าใช้จ่ายในการปูบล็อกปูถนนด้วยสมการได้ โดยกำหนดตัวแปรสองตัวแปรแทนสิ่งที่เรานำมาจับคู่กัน ถ้าให้ x แทนพื้นที่ที่จะปูบล็อกปูถนน หน่วยเป็นตารางเมตร และ y แทนค่าใช้จ่ายในการปูบล็อกปูถนน จะพบว่า

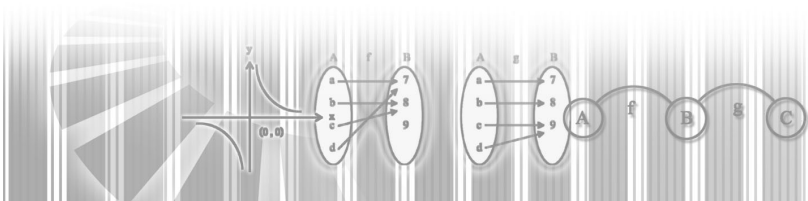
$$y = 600x \text{ เมื่อ } x \geq 50$$

ความสัมพันธ์เป็นเรื่องสำคัญของคณิตศาสตร์ ในคณิตศาสตร์มักกล่าวถึงการเกี่ยวข้องกันระหว่างสมาชิกของเซต 2 เซตภายใต้กฎเกณฑ์ซึ่งอยู่ในรูปสมการหรืออสมการ ความสัมพันธ์เป็นเซตซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ

บทนิยามของความสัมพันธ์เป็นดังนี้

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

จากบทนิยาม จะเห็นว่าความสัมพันธ์เป็นเซตซึ่งมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ การเขียนความสัมพันธ์จึงเขียนในรูปเซตของคู่อันดับ โดยเขียนแบบแจกแจงสมาชิกหรือแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกก็ได้



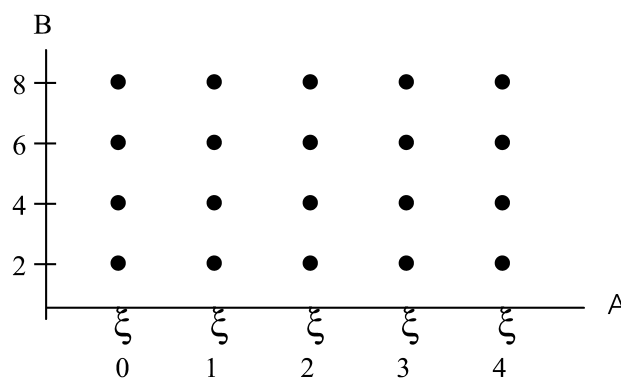
ตัวอย่างที่ 1 ให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$ และ $B = \{2,4,6,8\}$
จงหาความสัมพันธ์จาก A ไป B ต่อไปนี้

- 1) $r_1 = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x\}$
- 2) $r_2 = \{(x, y) \in A \times B / y < 2x\}$
- 3) $r_3 = \{(x, y) \in A \times B / y > 2x\}$

วิธีทำ A และ B เป็นเซตจำกัด ดังนั้น $A \times B$ เป็นเซตจำกัดด้วย

เนื่องจากความสัมพันธ์เป็นสับเซตของ $A \times B$

ความสัมพันธ์ r_1 , r_2 และ r_3 จึงเป็นเซตจำกัด โดยมี $A \times B$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์



กราฟของ $A \times B$

กราฟของ $A \times B$ เป็นจุด 20 จุดดังภาพ

การหาสมาชิกของ r_1 ทำโดยแทนค่า $x \in A$ ในสมการ $y = 2x$ เพื่อหา $y \in B$

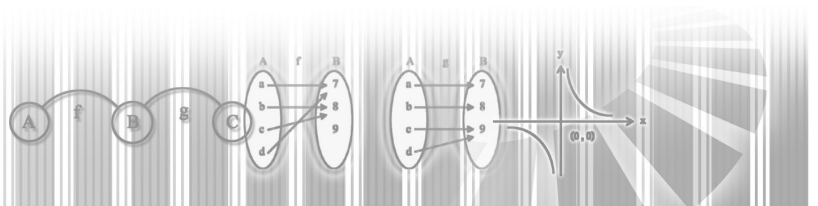
$$r_1 = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$$

การหาสมาชิกของ r_2 พิจารณาจาก (x, y) ทั้งหมดใน $A \times B$ ซึ่ง $y < 2x$ พบว่าจุดทุกจุดที่อยู่ใต้กราฟของ r_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข $y < 2x$ เช่น $(2,2)$ เมื่อแทนค่า x ด้วย 2 และแทนค่า y ด้วย 2 ในสมการ $y < 2x$ จะได้ประพจน์ $2 < 2(2)$ ซึ่งเป็นจริง

$$r_2 = \{(3,2), (3,4), (4,2), (4,6)\}$$

การหาสมาชิกของ r_3 พิจารณาจาก (x, y) ทั้งหมดใน $A \times B$ ซึ่ง $y > 2x$ พบว่าจุดทั้งหลายที่อยู่เหนือกราฟของ r_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข $y > 2x$ เช่น $(1,4)$ เมื่อแทนค่า x ด้วย 1 และแทนค่า y ด้วย 4 ในสมการ $y > 2x$ จะได้ประพจน์ $4 > 2(1)$ ซึ่งเป็นจริง

$$r_3 = \{(0,2), (0,4), (0,6), (0,8), (1,4), (1,6), (1,8), (2,6), (2,8), (3,8)\}$$



ตัวอย่างที่ 2 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็ม

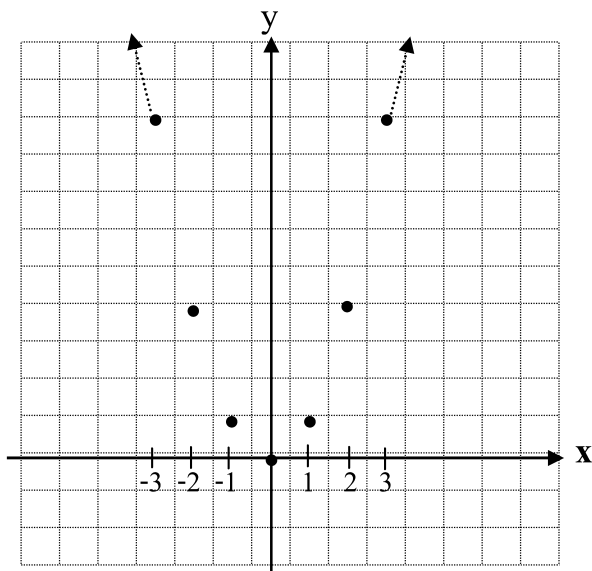
$$r = \{(x, y) \in I \times I / y = x^2\}$$

วิธีทำ r เป็นเซตอันดับที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ หากู้อันดับบางคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r และเขียนกราฟของคู่อันดับเหล่านี้บนกราฟของ $I \times I$ เพื่อทราบลักษณะกราฟของ r

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

กราฟของ r เป็นจุดเรียงกันอยู่ในแนวเส้นโค้งพาราโบลา มีแกน y เป็นแกนสมมาตร จุดต่ำสุดของกราฟคือที่จุด $(0, 0)$

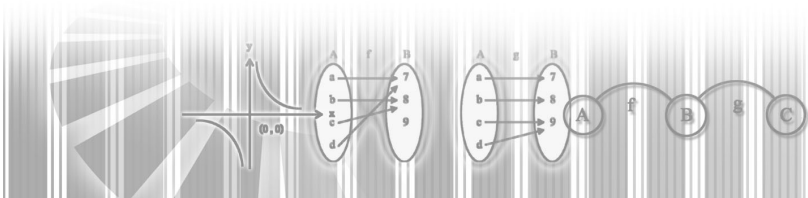
เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ สำหรับทุกค่าของจำนวนเต็ม x กราฟจึงอยู่เหนือแกน x



สำหรับจำนวนเต็ม $x > 0$ ถ้า x เพิ่มขึ้น แล้ว y จะเพิ่มขึ้นด้วย หรือ ถ้า x ลดลง แล้ว y จะลดลงด้วย

สำหรับจำนวนเต็ม $x < 0$ ถ้า x เพิ่มขึ้น แล้ว y จะลดลง หรือ ถ้า x ลดลง แล้ว y จะเพิ่มขึ้น

$$r = \{ \dots, (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots \}$$



ตัวอย่างที่ 3 ให้ $r = \{(x, y) \in I \times I / y = |x|\}$ จงเขียนกราฟของ r

วิธีทำ r เป็นความสัมพันธ์ใน I , r เป็นเซตอันดับที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้
เนื่องจาก

$$|x| = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ เมื่อ } x \geq 0 \\ -x \text{ เมื่อ } x < 0 \end{array} \right\}$$

เช่น $|0| = 0$, $|3| = 3$, $|-3| = -(-3) = 3$

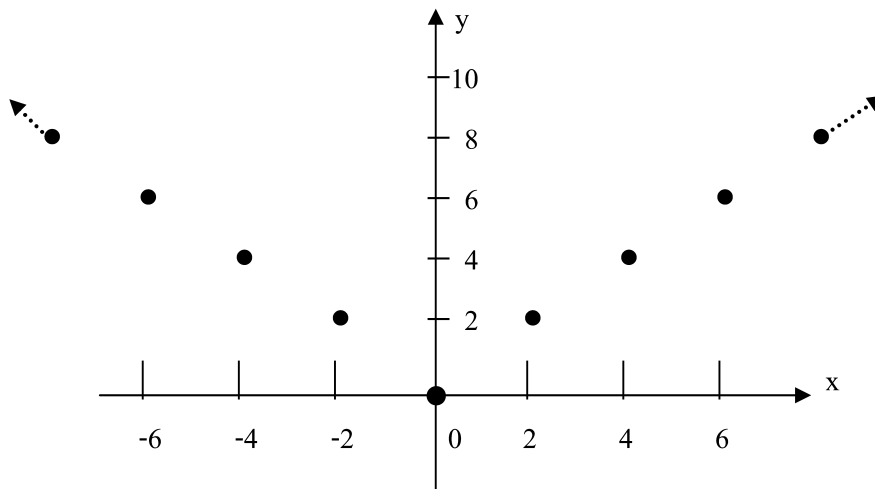
เขียนสมการ $y = |x|$ ของความสัมพันธ์ r ได้ดังนี้

$$y = \left\{ \begin{array}{l} x \text{ เมื่อ } x \geq 0 \text{ และ } x \in I \\ -x \text{ เมื่อ } x < 0 \text{ และ } x \in I \end{array} \right\}$$

คู่อันดับบางคู่ที่เป็นสมาชิกของ r เป็นดังนี้

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y= x $	3	2	1	0	1	2	3

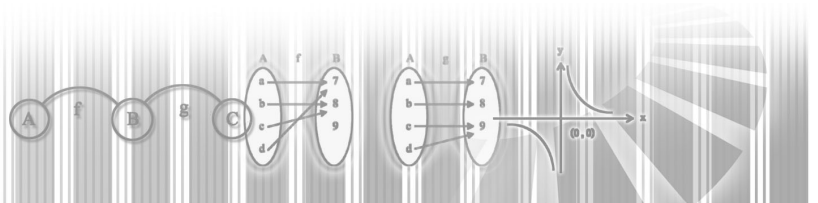
เขียนกราฟของคู่อันดับเหล่านี้ เพื่อทราบลักษณะกราฟของ r



กราฟของ r เป็นจุดเรียงกันเป็นเส้นตรงสองแนว คือ แนวเส้นตรง $y = x$ สำหรับ $x \in I$ และ $x \geq 0$ และ แนวเส้นตรง $y = -x$ สำหรับ $x \in I$ และ $x < 0$

จากกราฟ สำหรับจำนวนเต็มบวก x ถ้า x เพิ่มขึ้น แล้ว y จะเพิ่มขึ้นด้วย หรือถ้า x ลดลง แล้ว y จะลดลงด้วย

สำหรับจำนวนเต็มลบ x ถ้า x เพิ่มขึ้น แล้ว y จะลดลง หรือ ถ้า x ลดลง แล้ว y จะเพิ่มขึ้น



ใบกิจกรรมที่ 2

1. กำหนด $A = \{1,2,3,4\}$ จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้แบบแจกแจงสมาชิกและแสดงกราฟของความสัมพันธ์ในเซต A

1.1 $r_1 = \{(x, y) \in A \times A / y = x - 1\}$

1.2 $r_2 = \{(x, y) \in A \times A / y > x - 1\}$

1.3 $r_3 = \{(x, y) \in A \times A / y < x - 1\}$

1.4 $r_4 = \{(x, y) \in A \times A / y \leq x\}$

1.5 $r_5 = \{(x, y) \in A \times A / y \geq 5 - x\}$

1.6 $r_4 \cap r_5$

2. ตารางแต่ละตารางต่อไปนี้ แสดงคู่อันดับบางคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ และตามลำดับ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ใน A และ $A = \{0,1,2,3,\dots\}$

1) จงทำตารางให้สมบูรณ์

2) หาสมการที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ดังกล่าว

3) เขียนเซตของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต

2.1

X	0	1	2	3		8	20	100
Y	0	7	14	21	28			

2.2

X	0	1	2	3	4	8	20	100
Y	6	7	8	9				

2.3

X	0	1	2	3	4	8	20	100
Y	1	3	5	7				

2.4

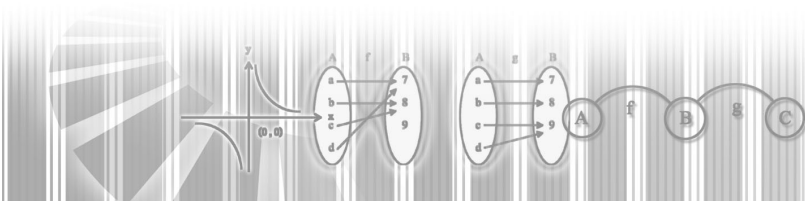
X	0	1	2	3	4	6	20	100
Y	1	2	5	10	17			

3. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

3.1 $r_1 = \{(x, y) \in I \times I / y = x^2 - 1\}$

3.2 $r_2 = \{(x, y) \in I \times I / y = -2x + 3\}$

3.3 $r_3 = \{(x, y) \in I \times I / y = |x| + 1\}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถบอกนิยามคำว่า โดเมน และเรนจ์
สามารถหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาโดเมนของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้
2. หาเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

การศึกษาความสัมพันธ์ใดก็ตาม ต้องสนใจขอบเขตของสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มอันดับในความสัมพันธ์ และขอบเขตของสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับในความสัมพันธ์

3. เนื้อหาสาระ

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกคู่อันดับใน r

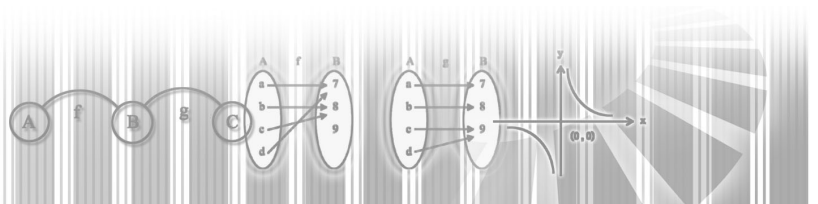
$$D_r = \{x / X \in A \text{ และ } (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของทุกคู่อันดับใน r

$$R_r = \{y / X \in B \text{ และ } (x, y) \in r\}$$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เขียนในรูปแบบเซตแบบแจกแจงสมาชิกหลายๆ ตัวอย่าง
2. ให้นักเรียนเขียนเซตใหม่ โดยเซตที่หนึ่งเป็นเซตของสมาชิกตัวหน้าของแต่ละคู่อันดับ และเซตที่สองเป็นเซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับ
3. ครูบอกให้นักเรียนทราบว่า เซตที่หนึ่งเรียกว่า โดเมนของความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วย D_r และเซตที่สองเรียกว่า เรนจ์ของความสัมพันธ์ เขียนแทนด้วย R_r



4. นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
5. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก จากใบความรู้ที่ 3
6. ให้นักเรียนฝึกทักษะ โดยทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 3

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 3
2. ใบกิจกรรมที่ 3
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. สืบค้นทาง Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำใบกิจกรรม
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

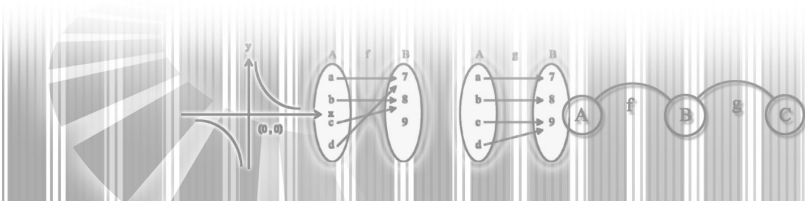
8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 3

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

กำหนด $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ $B = \{1,2,3,4\}$

และ $r = \{(x, y) \in A \times B / y = \frac{1}{2}x\}$

เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้

$$r = \{(2,1), (4,2), (6,3)\}$$

พิจารณาเซตของสมาชิกตัวหน้าของกลุ่มอันดับใน r จะได้เซต $\{2,4,6\}$ เรียกเซตนี้ว่า โดเมน (Domain) ของ r

พิจารณาเซตของสมาชิกตัวหลังของกลุ่มอันดับใน r จะได้เซต $\{1,2,3\}$ เรียกเซตนี้ว่า เรนจ์ (Range) ของ r

เนื่องจาก r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เขียน ขอให้สังเกตว่าโดเมนของ r เป็นสับเซตของ A และเรนจ์ของ r เป็นสับเซตของ B

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

โดเมนของ r เขียนแทนด้วย D_r คือเซตของสมาชิกตัวหน้าของทุกกลุ่มอันดับใน r

$$D_r = \{x / x \in A \text{ และ } (x, y) \in r\}$$

เรนจ์ของ r เขียนแทนด้วย R_r คือเซตของสมาชิกตัวหลังของทุกกลุ่มอันดับใน r

$$R_r = \{y / y \in B \text{ และ } (x, y) \in r\}$$

ตัวอย่างที่ 1 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ “เป็นตัวประกอบของ” จาก $A = \{1,2,3,4\}$ ไป

$B = \{10,15,20,25\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เขียน r แบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้

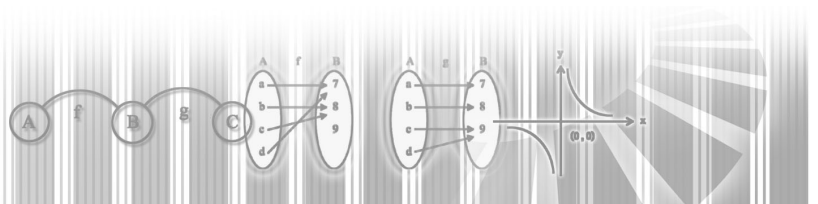
$$r = \{(x, y) \in A \times B / x \in A, y \in B \text{ และ } x \text{ หาร } y \text{ ลงตัว}\}$$

x เป็นตัวประกอบของ y หมายความว่า x หาร y ลงตัว และ $x \in A, y \in B$ จะได้เซต r ดังนี้

$$r = \{(1,10), (1,15), (1,20), (1,25), (2,10), (2,20), (3,15), (4,20)\}$$

โดเมนของ r คือ $D_r = \{1,2,3,4\}$

เรนจ์ของ r คือ $R_r = \{10,15,20,25\}$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in I \times I / x - 2y = 2\}$

วิธีทำ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็ม r เป็นเซตอนันต์

สามารถใช้กราฟช่วยในการหาโดเมนและเรนจ์ของ r

จัดรูปสมการของ r เสียใหม่ดังนี้

$$x - 2y = 2$$

$$x - 2 = 2y$$

$$\frac{x - 2}{2} = y$$

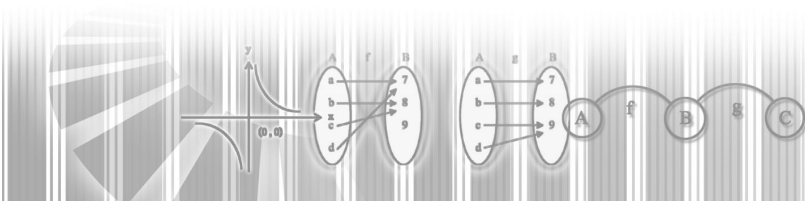
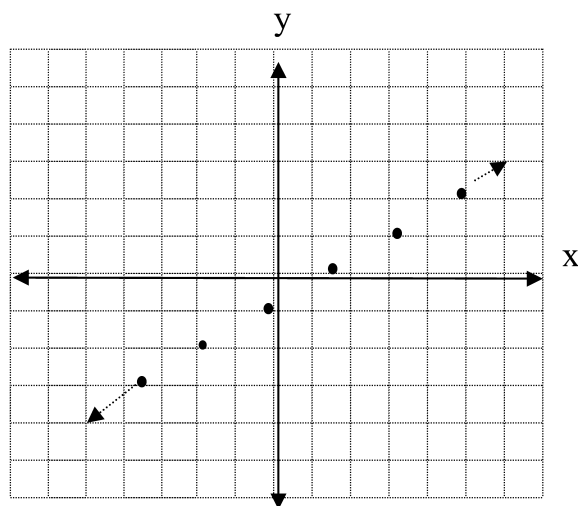
$$\frac{1}{2}x - 1 = y$$

$$\text{จะได้ } r = \left\{ (x, y) \in I \times I / y = \frac{1}{2}x - 1 \right\}$$

หาจุดอันดับบางคู่ของ r

x	$y = \frac{1}{2}x - 1$	y
-4	$y = \frac{1}{2}(-4) - 1 = -3$	(-4, -3)
-2	$y = \frac{1}{2}(-2) - 1 = -2$	(-2, -2)
0	$y = \frac{1}{2}(0) - 1 = -1$	(0, -1)
2	$y = \frac{1}{2}(2) - 1 = 0$	(2, 0)
4	$y = \frac{1}{2}(4) - 1 = 1$	(4, 1)

กราฟของ r เป็นจุดเรียงเป็นแนวเส้นตรง



เมื่อพิจารณากราฟของ r จะพบว่าสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม x ที่เป็นจำนวนคู่ ย่อมมีจำนวนเต็ม y ซึ่ง $y = \frac{1}{2}x - 1$ ได้เสมอ ดังนั้น

โดเมนของ r คือ $D_1 = \{x \in I / x \in A \text{ และ } (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ $R_1 = \{y / y \in B \text{ และ } (x, y) \in r\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดความสัมพันธ์ r ในเซตของจำนวนจริงดังนี้

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x - 2y - 2 = 0\}$$

จงเขียนกราฟของ r และหาโดเมนและเรนจ์ของ r

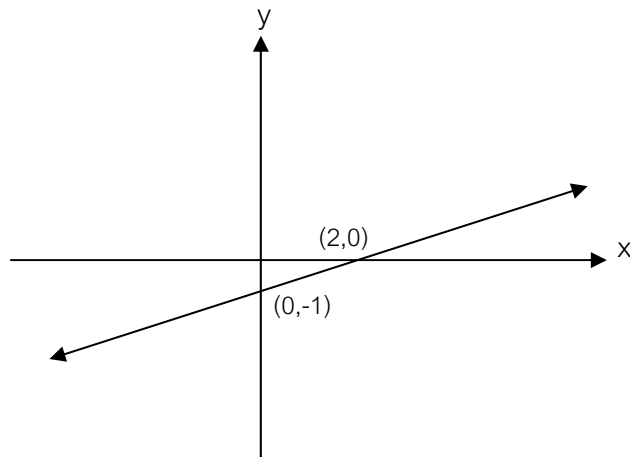
วิธีทำ กราฟของ r เป็นเส้นตรง หากู้อันดับสองคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r ซึ่งเป็นจุดอยู่บนแกน x และจุดอยู่บนแกน y

แทนค่า $y=0$ ในสมการ $x - 2y - 2 = 0$ จะได้ $x = 2$

ดังนั้น จุดบนแกน x คือ $(2, 0)$

แทนค่า $x=0$ ในสมการ $x - 2y - 2 = 0$ จะได้ $y = -1$

ดังนั้น จุดบนแกน y คือ $(0, -1)$



จุดที่เรียงต่อเนื่องกันบนเส้นตรงเป็นสมาชิกของ r จากกราฟ

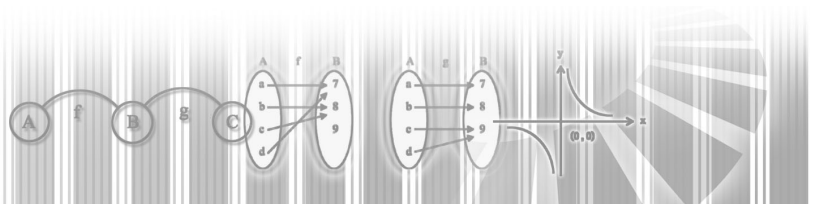
โดเมนของ r คือ $D_1 = \{x / x \in A \text{ และ } (x, y) \in r\}$

เรนจ์ของ r คือ $R_1 = \{y \in B \text{ และ } (x, y) \in r\}$

ข้อสังเกต

สมการ $x - 2y - 2 = 0$ เขียนใหม่ได้เป็น $y = \frac{1}{2}x - 1$

นั่นคือ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{2}x - 1\}$



ถ้าไม่ได้เขียนกราฟของ r สามารถหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยพิจารณาสมการ $y = \frac{1}{2}x - 1$

พบว่า สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ย่อมมีจำนวนจริง y กล่าวคือ

$$\text{ถ้า } x=2 \quad \text{ได้ } y=0$$

$$\text{ถ้า } x>2 \quad \text{ได้ } y>0$$

$$\text{ถ้า } x<2 \quad \text{ได้ } y<0$$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r จึงเป็นเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 4 - x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ เราอาจหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยวิเคราะห์จากสมการ $y = 4 - x^2$ ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ย่อมมี $4 - x^2 \in \mathbb{R}$

$$\text{ดังนั้น} \quad D_r = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

จากสมการ $y = 4 - x^2$ จัดรูปสมการนี้ใหม่จะได้ $x^2 = 4 - y$

$$\text{เนื่องจาก} \quad x^2 \geq 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad 4 - y \geq 0$$

$$\text{นั่นคือ} \quad 4 \geq y$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad y \leq 4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad R_r = \{y \in \mathbb{R} / y \leq 4\}$$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x - 2|\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

วิธีทำ สามารถหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยพิจารณาจากสมการ $y = |x - 2|$ ดังนี้

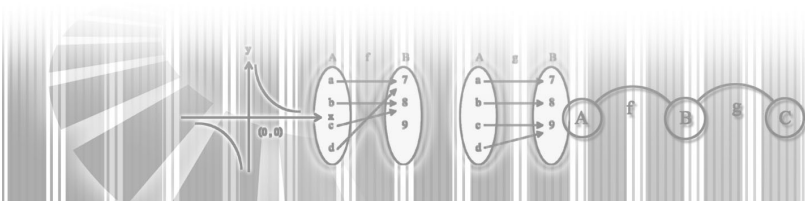
สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ย่อมมี $x - 2 \in \mathbb{R}$

$$\text{เนื่องจาก} \quad |x - 2| \geq 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y \geq 0$$

$$\text{โดเมนของ } r \text{ คือ} \quad D_r = \{x / x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{เรนจ์ของ } r \text{ คือ} \quad R_r = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$$



ใบกิจกรรมที่ 3

1. ให้ $A = \{x \in I / -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{y \in I / -4 \leq y \leq 4\}$

จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $r_1 = \{(x, y) \in A \times B / y = x\}$

1.2 $r_2 = \{(x, y) \in A \times B / y < x\}$

1.3 $r_3 = \{(x, y) \in A \times B / y > x\}$

2. จงเขียนกราฟและระบุโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ในเซต I ต่อไปนี้

2.1 $r_1 = \{(x, y) \in I \times I / x + y = 2\}$

2.2 $r_2 = \{(x, y) \in I \times I / y = 2x^2 - 3\}$

2.3 $r_3 = \{(x, y) \in I \times I / x = y^2\}$

2.4 $r_4 = \{(x, y) \in I \times I / y = |x| + 2\}$

2.5 $r_5 = \{(x, y) \in I \times I / x = |y|\}$

3. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีพื้นที่ 36 ตารางเมตร ถ้าให้ d แทนความยาว และ w แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ หน่วยเป็นเมตรและเป็นจำนวนเต็มบวก จงหาความสัมพันธ์ r ที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (d, w) พร้อมทั้งเขียนกราฟของ r และระบุโดเมนและเรนจ์ของ r

4. จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{2}{3}x - 2\}$

4.2 $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = -x + 1\}$

4.3 $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2\}$

4.4 $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{2}|x|\}$

4.5 $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2|y|\}$

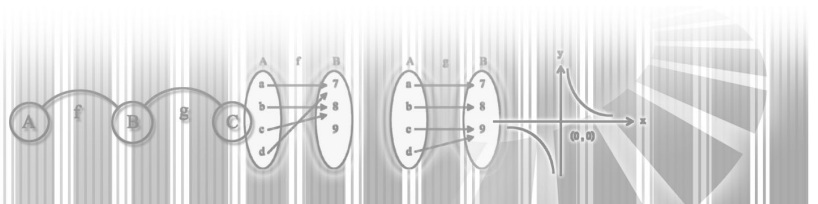
4.6 $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x+1}\}$

4.7 $r_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{9-x^2}\}$

4.8 $r_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 3\}$

4.9 $r_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x\}$

4.10 $r_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^3 - 1\}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง อินเวอร์สของความสัมพันธ์
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้
2. หาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

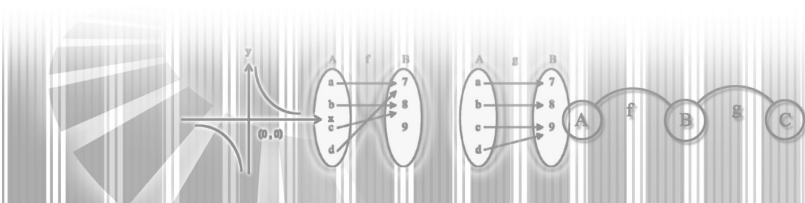
ถ้าสลับตำแหน่งของสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับในความสัมพันธ์จะได้ความสัมพันธ์ใหม่ เรียกว่า อินเวอร์สของความสัมพันธ์

3. เนื้อหาสาระ

1. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1} หมายถึงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r
2. โดเมนของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ เท่ากับเรนจ์ของความสัมพันธ์และเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เท่ากับโดเมนของความสัมพันธ์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เป็นเซตที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกหลายๆ เซต แล้วให้นักเรียนเขียนเซตเหล่านั้นใหม่ โดยสลับที่ระหว่างสมาชิกคู่อันดับตัวหน้าและตัวหลังของทุกคู่ อันดับในแต่ละเซต แล้วครูบอกนักเรียนว่าเซตของคู่อันดับที่นักเรียนเขียนขึ้นมาใหม่นั้นเรียกว่า อินเวอร์สของความสัมพันธ์นั้นๆ เขียนแทนด้วย r^{-1}
2. นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของอินเวอร์สของความสัมพันธ์
3. ครูทบทวนการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ แล้วให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์นั้นแล้วเปรียบเทียบกัน



4. ให้นักเรียนช่วยกันหาข้อสรุปให้ได้ว่าโดเมนของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เท่ากับเรนจ์ของความสัมพันธ์และเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์เท่ากับโดเมนของความสัมพันธ์
5. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 4
6. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 4

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 4
2. ใบกิจกรรมที่ 4
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

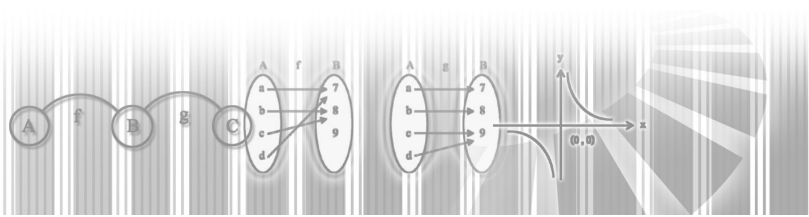
.....

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 4

อินเวอร์สของความสัมพันธ์

ให้ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

และ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

$$r = \{(x, y) \in A \times B / y = 2x\}$$

จะได้ $r = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$

โดเมนของ r คือ $\{0,1,2,3,4\}$ เรนจ์ของ r คือ $\{0,2,4,6,8\}$

ถ้าสลับตำแหน่งของสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน r จะได้ความสัมพันธ์

ใหม่ เรียกว่าอินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

$$r^{-1} = \{(0,0), (2,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$$

โดเมนของ r^{-1} คือ $\{0,2,4,6,8\}$ เรนจ์ของ r^{-1} คือ $\{0,1,2,3,4\}$

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A และเขียน r^{-1} แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกดังนี้

$$r^{-1} = \{(x, y) \in B \times A / y = \frac{x}{2}\}$$

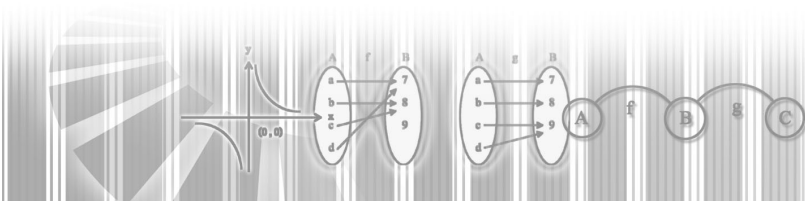
บทนิยามของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ คือ

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B อินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไป A ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยคู่อันดับ (y, x) สำหรับทุกๆ $(x, y) \in r$ นั่นคือ

$$r^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in r\}$$

ถ้าเซตของความสัมพันธ์ r เป็นเซตอนันต์ และเขียนแบบแจกแจงสมาชิกไม่ได้เช่น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$ การหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r ให้กระทำโดยสลับที่ระหว่างตัวแปร x และ y ในสมการ จะได้อินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r ในแบบต่างๆ ดังต่อไปนี้

- 1) $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = y^2\}$
- 2) $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \pm\sqrt{x}\}$
- 3) $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2\}$
- 4) $r^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = \pm\sqrt{y}\}$



ตัวอย่างที่ 1 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$ จงหา r^{-1}

วิธีทำ หาสมการที่ใช้กำหนดการจับคู่ระหว่าง x และ y ของ r^{-1} ด้วยการสลับที่ระหว่าง x และ y ในสมการของ r

สมการของ r	สมการของ r^{-1}
$y = 2x - 3$	$x = 2y - 3$

จัดรูปสมการของ r^{-1} ดังนี้

$$x = 2y - 3$$

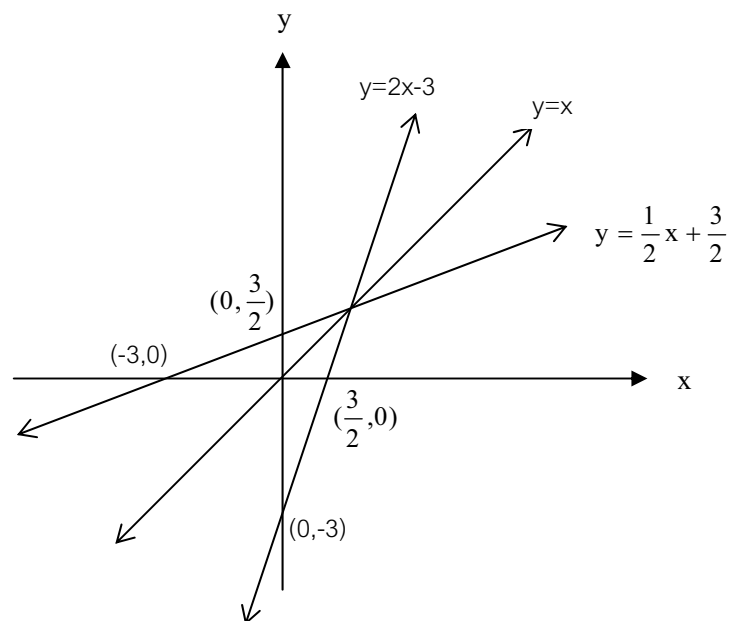
$$x + 3 = 2y$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = y$$

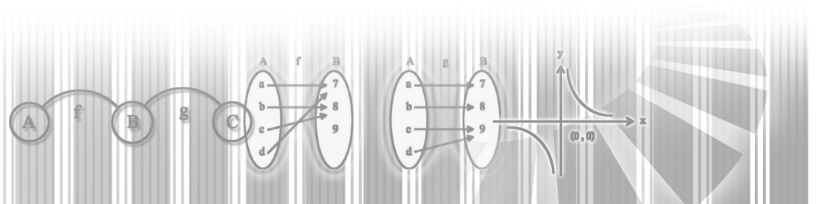
$$\text{ดังนั้น } r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\}$$

กราฟของ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 3\}$ เป็นเส้นตรง มีจุดตัดบนแกน x คือ $(\frac{3}{2}, 0)$ และจุดตัดบนแกน y คือ $(0, -3)$

เนื่องจาก r^{-1} เป็นอินเวอร์สของความสัมพันธ์ของ r ดังนั้นจุด $(0, \frac{3}{2})$ และ $(-3, 0)$ อยู่บนกราฟของ r^{-1}



กราฟของ r และ r^{-1} จะสมมาตรกัน เมื่อเทียบกับเส้นตรง $y = x$ กล่าวง่าย ๆ ว่า ถ้าพับกระดาษตามแนวเส้นตรง $y = x$ กราฟของ r และ r^{-1} จะทับกันสนิท



ตัวอย่างที่ 2 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| - 2\}$ จงหา r^{-1} พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ สมการที่กำหนด r^{-1} เกิดจากการสลับที่ระหว่าง x และ y ในสมการ $y = |x| - 2$

สมการที่กำหนด r^{-1} คือ $x = |y| - 2$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = |y| - 2\}$

จากสมการ $x = |y| - 2$ จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$x + 2 = |y|$$

สำหรับทุกจำนวนจริง y ใดๆ $|y| \geq 0$ ดังนั้น

$$x + 2 \geq 0$$

นั่นคือ $x \geq -2$

โดเมนของ $r^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$

เรนจ์ของ $r^{-1} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$

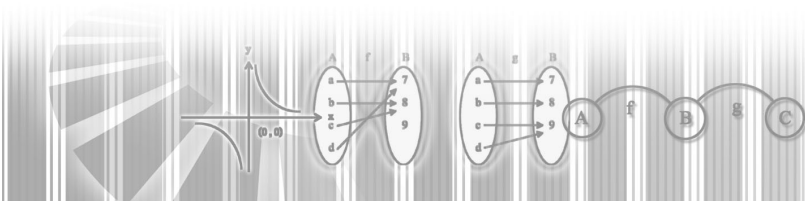
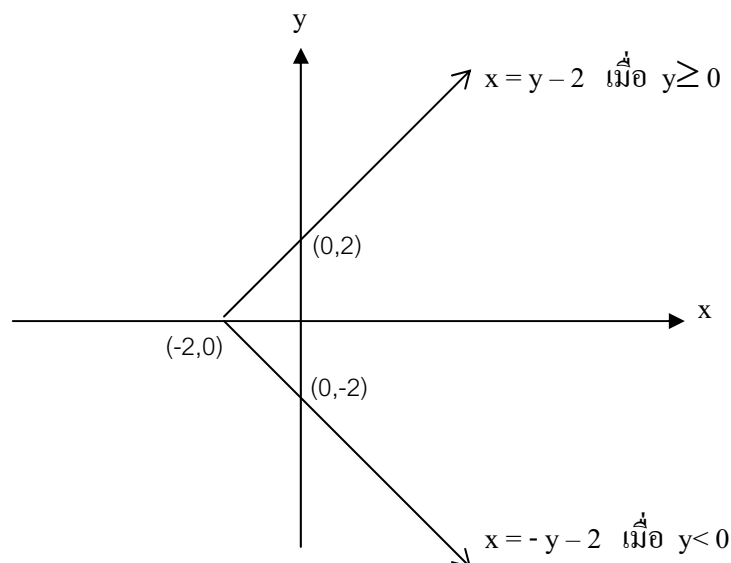
จากสมการของ r^{-1}

$$x = |y| - 2$$

โดยบทนิยามของค่าสมบูรณ์ เขียนสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$x = \begin{cases} y - 2 & \text{เมื่อ } y \geq 0 \\ -y - 2 & \text{เมื่อ } y < 0 \end{cases}$$

กราฟของความสัมพันธ์ r^{-1} เป็นดังนี้



ตัวอย่างที่ 3 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 1\}$ จงหา r^{-1} พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

วิธีทำ สมการที่กำหนด r^{-1} เกิดจากการสลับที่ระหว่าง x และ y ในสมการ $y = x^2 - 1$
สมการที่กำหนด r^{-1} คือ $x = y^2 - 1$

$$x + 1 = y^2$$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^2 = x + 1\}$

สำหรับจำนวนจริง y ใดๆ $y^2 \geq 0$

ดังนั้น $x + 1 \geq 0$ นั่นคือ $x \geq -1$

โดเมนของ $r^{-1} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

เรนจ์ของ $r^{-1} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y^3 = x - 1\}$ จงหา r^{-1} พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

วิธีทำ สมการที่กำหนด r^{-1} เกิดจากการสลับที่ระหว่าง x และ y ในสมการ $y^3 = x - 1$
จะได้สมการที่กำหนด r^{-1} คือ $x^3 = y - 1$

$$x^3 + 1 = y$$

$$r^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^3 + 1 = y\}$$

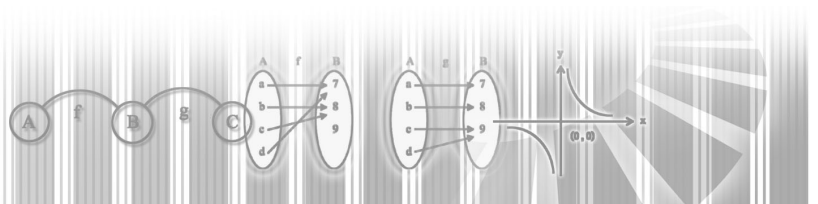
พิจารณาคู่อันดับบางคู่ของ r^{-1}

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^3 + 1$	-26	-7	0	1	2	9	28

จะได้ว่า

โดเมนของ $r^{-1} = \{x / x \in \mathbb{R}\}$

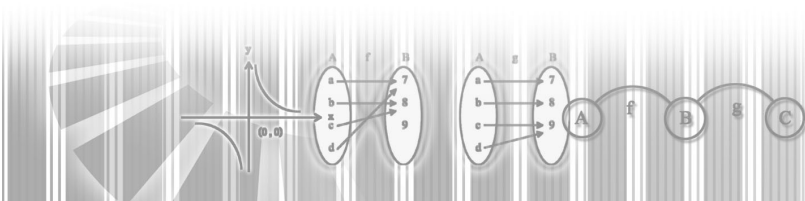
เรนจ์ของ $r^{-1} = \{y / y \in \mathbb{R}\}$



ใบกิจกรรมที่ 4

จงหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งระบุโดเมนและเรนจ์ของอินเวอร์สของความสัมพันธ์

1. $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 3x - y = 4\}$
2. $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 9 - x^2\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x - 2}\}$
5. $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = |x| + 2\}$
6. $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |x| + |y| = 5\}$
7. $r_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{16 - x^2}\}$
8. $r_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{2}x^2\}$
9. $r_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 - 1}\}$
10. $r_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{1}{x + 2}\}$
11. $r_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 + 1}\}$
12. $r_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{x^2 + 5}\}$
13. $r_{13} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = \sqrt{y^2 + 1}\}$
14. $r_{14} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = \sqrt{y^2 + 5}\}$
15. $r_{15} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \frac{2x}{1 - 3x}\}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง กราฟของความสัมพันธ์
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

สามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

ในระบบแกนพิกัดสามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างคู่อันดับของจำนวนจริง (x, y) กับจุดในระนาบ โดยให้ x เป็นพิกัดแรกและ y เป็นพิกัดหลัง

เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริงและความสัมพันธ์ r เป็นสับเซตของ $R \times R$ กราฟของความสัมพันธ์ r คือเซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ r

3. เนื้อหาสาระ

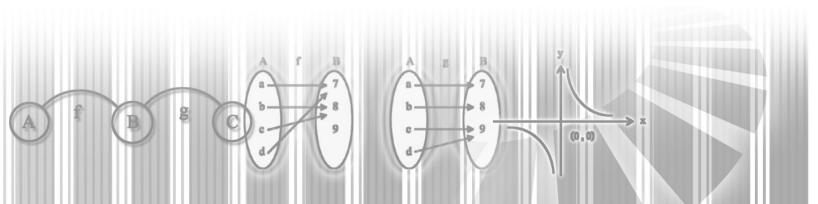
กราฟของความสัมพันธ์ เป็นเซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ โดยมีหลายรูปแบบ ดังนี้

- | | |
|-------------------|---|
| 1) บริเวณที่แรเงา | เป็นกราฟของความสัมพันธ์ |
| 2) เส้นทึบ | แสดงว่า ทุกจุดบนเส้นกราฟเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ |
| 3) เส้นประ | แสดงว่า ทุกจุดบนเส้นกราฟไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ทั้งหมด |
| 4) จุดทึบ | แสดงว่า จุดนั้นรวมอยู่ในกราฟ |
| 5) จุดกลวง | แสดงว่า จุดนั้นไม่รวมอยู่ในกราฟ |

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนเกี่ยวกับระนาบจำนวน และการกำหนดพิกัดของจุดซึ่งกำหนดโดยคู่อันดับต่างๆ บนระนาบจำนวน

2. ให้นักเรียนยกตัวอย่างความสัมพันธ์ r ที่เป็นสับเซตของ $R \times R$ ซึ่งเขียนในรูปแบบแจกแจงสมาชิก เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง



3. ให้นักเรียนนำคู่อันดับซึ่งเป็นสมาชิกในเซตนั้นๆ ไปเขียนแทนด้วยจุดบนระนาบจำนวน แล้วบอกนักเรียนว่าเซตของจุดบนระนาบจำนวนคือกราฟของความสัมพันธ์นั้น
4. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 5
5. นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 5
6. นักเรียนช่วยกันสรุปสาระสำคัญของกราฟของความสัมพันธ์

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 5
2. ใบกิจกรรมที่ 5
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. สืบค้นทาง Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

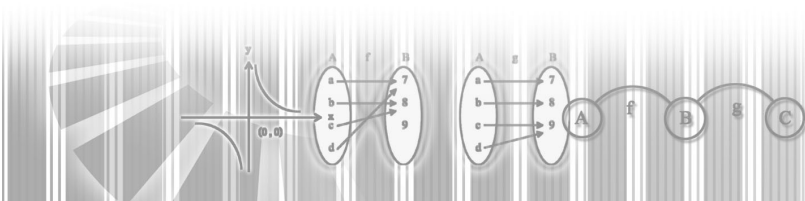
.....

.....

.....

.....

.....

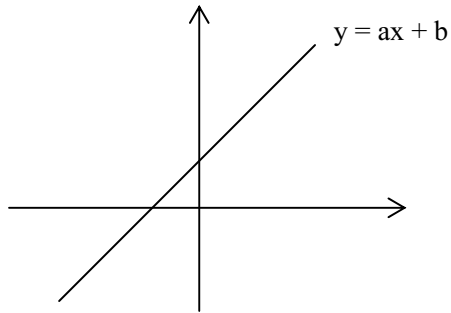


ใบความรู้ที่ 5

การเขียนกราฟของฟังก์ชัน ควรอาศัยรูปกราฟของฟังก์ชันที่เราทราบมาก่อนแล้ว ดังนี้

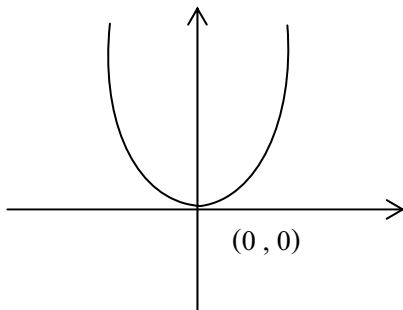
1) ฟังก์ชันเส้นตรง

$$y = ax + b, a > 0$$



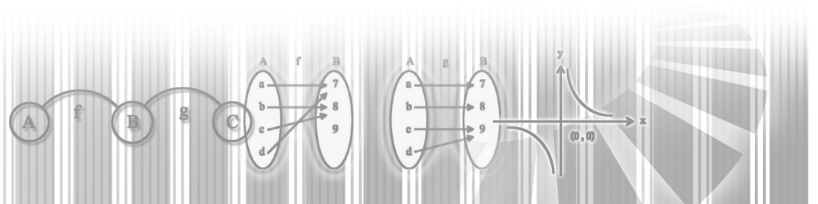
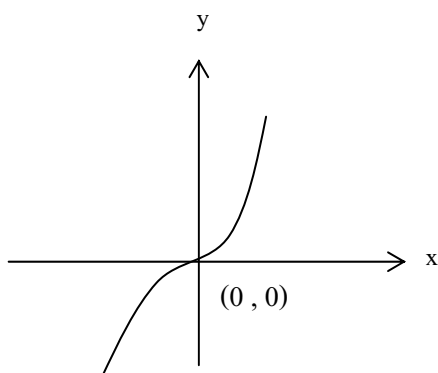
2) ฟังก์ชันกำลังสอง

$$y = ax^2, a > 0$$



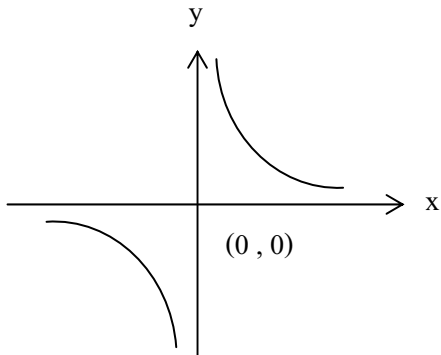
3) ฟังก์ชันกำลังสาม

$$y = ax^3, a > 0$$



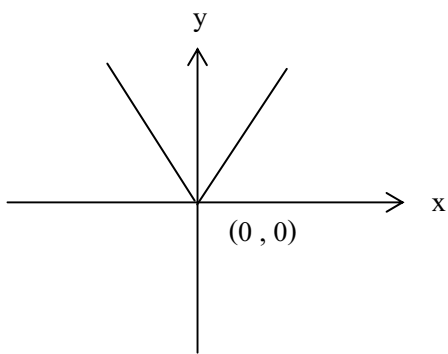
4) ฟังก์ชัน Hyperbola

$$xy = c, c > 0$$



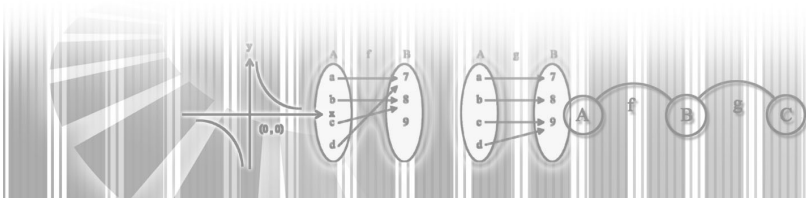
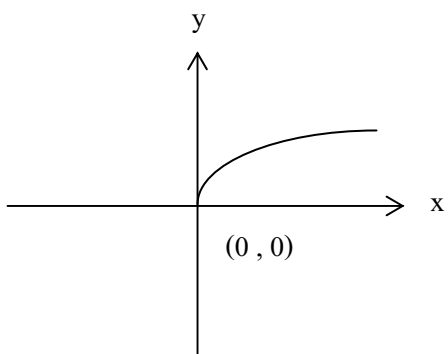
5) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

$$y = |x|$$



6) ฟังก์ชันรากที่ 2

$$y = \sqrt{x}$$

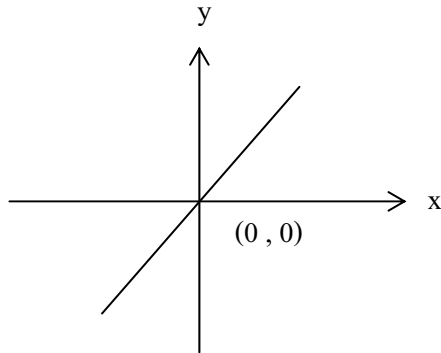


กราฟของความสัมพันธ์

เป็นเซตของจุดในระนาบ โดยที่แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์

1) เส้นทึบ แสดงว่าทุกจุดบนกราฟเป็นสมาชิกของความสัมพันธ์

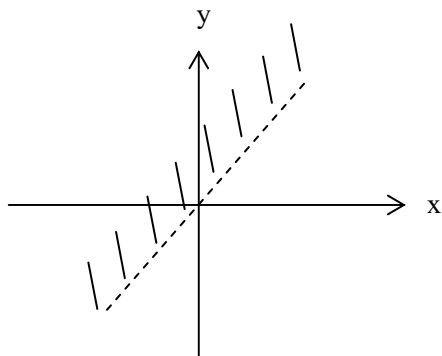
ตัวอย่าง 1) $y = x$



ทุกจุดบนเส้นตรง $y = x$
เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์

2) เส้นประ หมายถึงทุกจุดบนเส้นกราฟ ไม่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์

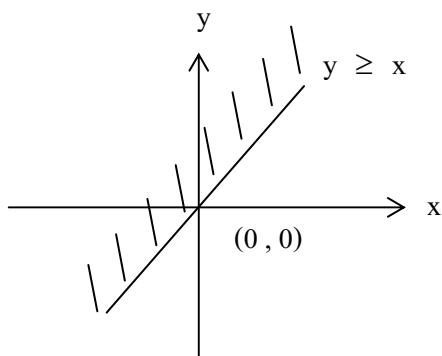
ตัวอย่าง 2) $y > x$



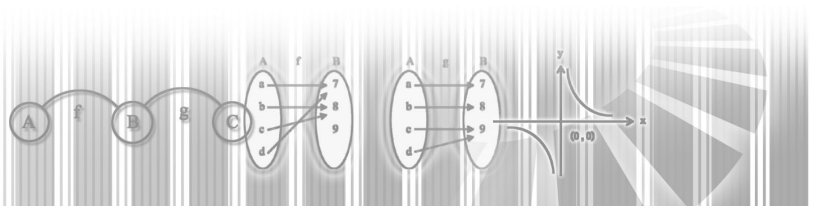
ทุกจุดเหนือเส้นกราฟ
เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์

3) จุดทึบ หมายถึงจุดนั้นๆ รวมอยู่ในกราฟ

ตัวอย่าง 3) $y \geq x$

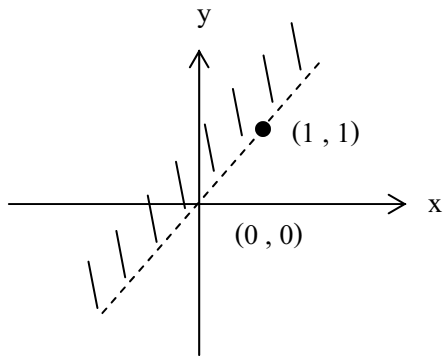


ทุกจุดบนเส้นกราฟ และเหนือเส้นกราฟ
เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์



4) จุดกลาง แสดงว่าจุดนั้นไม่อยู่ในกราฟ

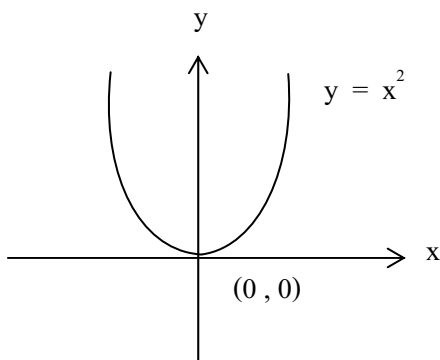
ตัวอย่าง 4) $y > x$



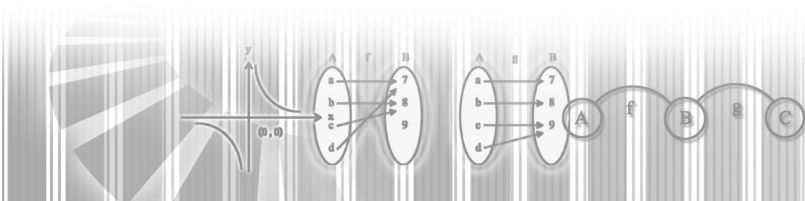
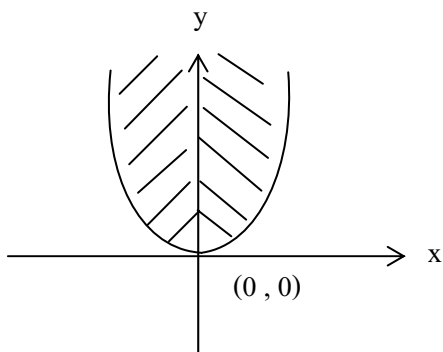
$(1, 1) \notin$ ความสัมพันธ์

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟความสัมพันธ์ต่อไปนี้

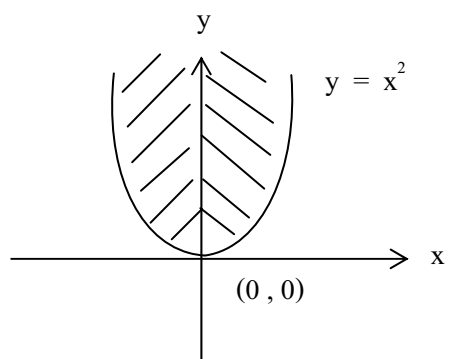
1) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 \}$



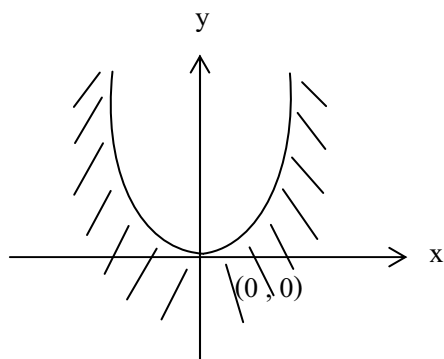
2) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x^2 \}$



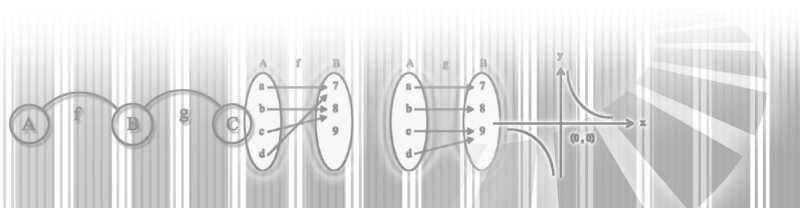
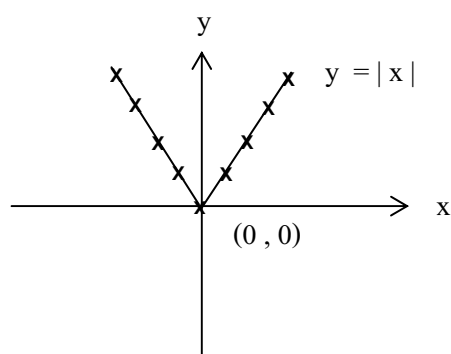
3) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x^2 \}$



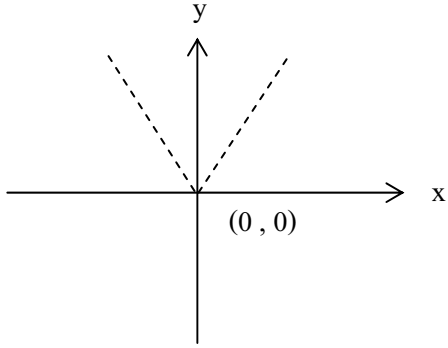
4) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y < x^2 \}$



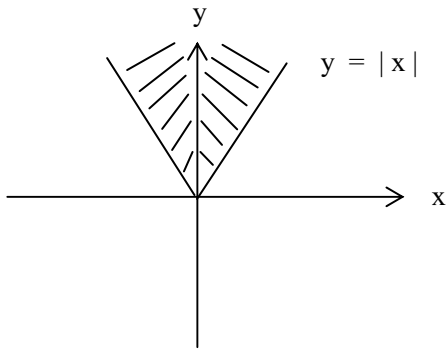
5) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid y = |x| \}$



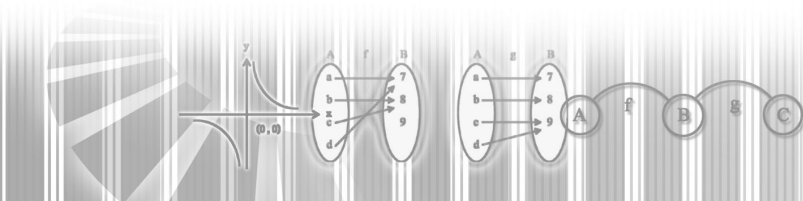
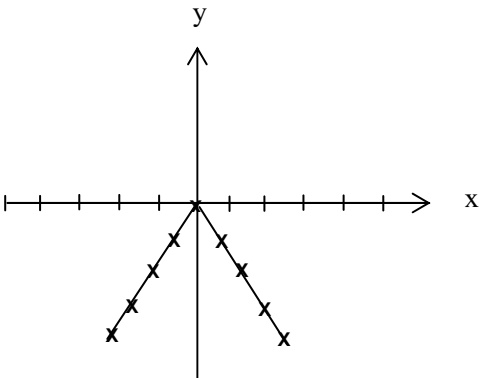
6) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > |x| \}$



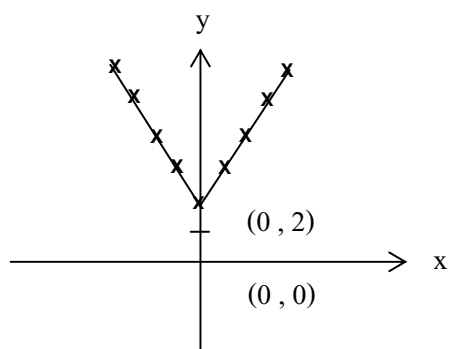
7) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq |x| \}$



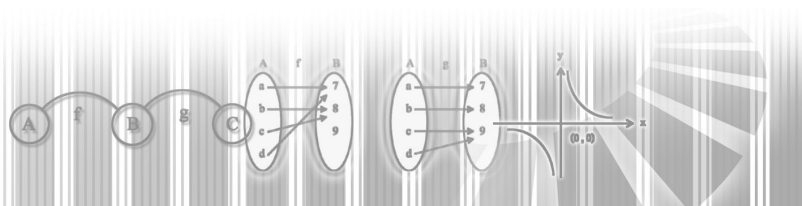
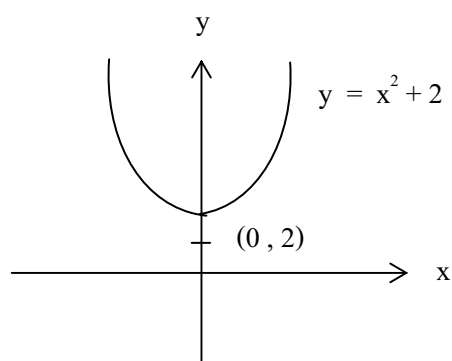
8) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = -|x| \}$



9) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -|x| + 2 \}$

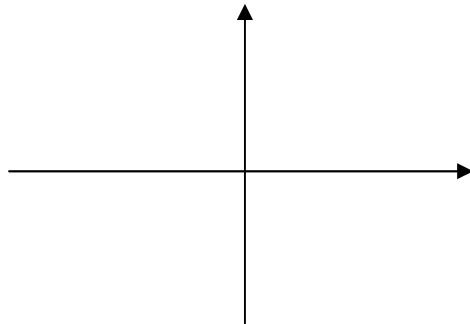


10) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 + 2 \}$

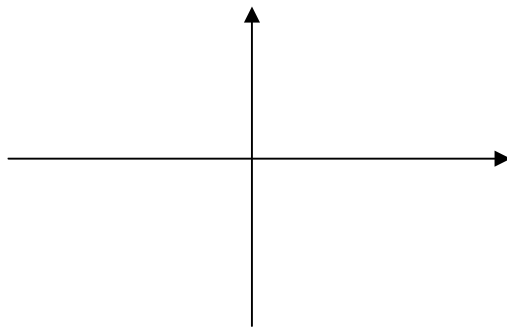


ใบกิจกรรมที่ 5

1. ให้นักเรียนหาพิกัดของจุด (1,2),(0,3),(1,-1),(-2,-3),(-3,2)



2. ให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(-3,-2),(-2,-1),(2,3),(3,4),(4,5)\}$



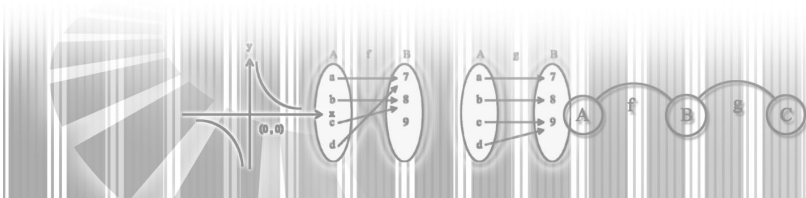
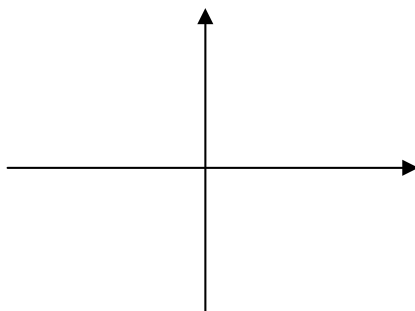
3. กำหนด $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 1\}$

จงหาค่า y จากค่า x ที่กำหนดไว้ในตาราง

x	0	1	2	3	4	5
y	1					

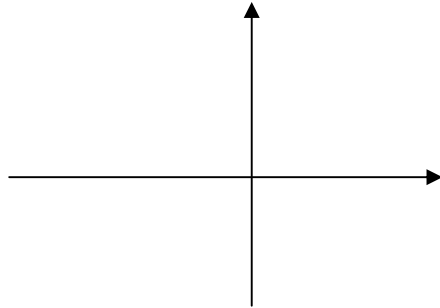
จงนำคู่อันดับที่หาได้จากข้อ 3 มาเขียนลงในระนาบจำนวน

จงเขียนจุดให้ครบตามเงื่อนไขของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 1\}$

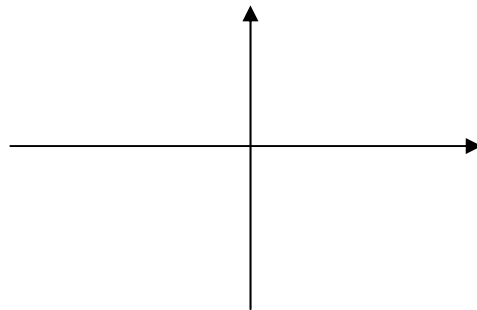


4. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + 1\}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9						

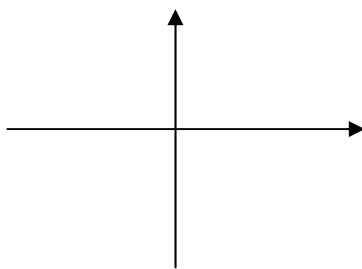


5. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$

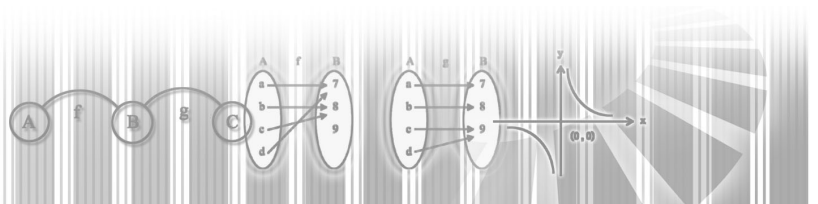
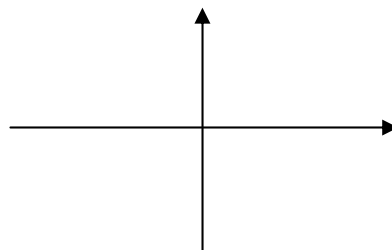


6. ให้นักเรียนเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

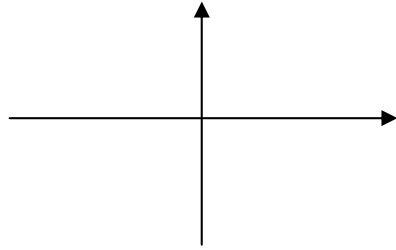
6.1 $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x\}$ เมื่อ $A = \{1,2,3,4,5\}$



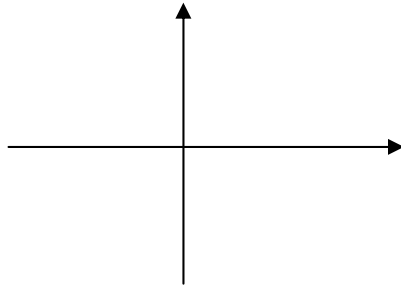
6.2 $r = \{(x,y) \in A \times A \mid y = x - 1\}$ เมื่อ $A = \{3,4,5,6,7\}$



6.3 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 4x\}$



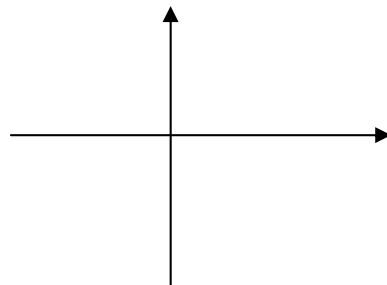
6.4 $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 3\}$



7. ให้นักเรียนเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

$r = \{(-3,-2), (-2,-1), (2,3), (3,4), (4,5)\}$

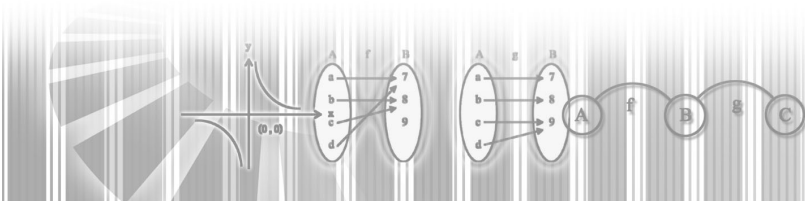
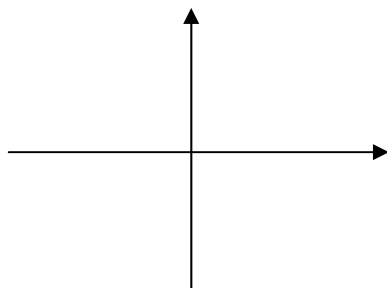
$r^{-1} = \dots\dots\dots$



8. ให้นักเรียนเขียนกราฟของ r และ r^{-1}

$r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 3\}$

$r^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \dots\dots\dots\}$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง ความหมายของฟังก์ชัน
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถบอกได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

บอกได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

2. แนวความคิดหลัก

ฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติเฉพาะว่า ทุกคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของความสัมพันธ์ ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม ความสัมพันธ์ r จะเป็นฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

- ครูและนักเรียนทบทวนเรื่องความสัมพันธ์
- แบ่งนักเรียนกลุ่มละ 5 คน ครูกำหนดความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ให้นักเรียนพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$r_1 = \{(1,2), (2,5), (4,2), (3,4)\}$$

$$r_2 = \{(2,1), (5,3), (6,5), (7,3)\}$$

$$r_3 = \{(1,2), (1,3), (2,4), (3,5)\}$$

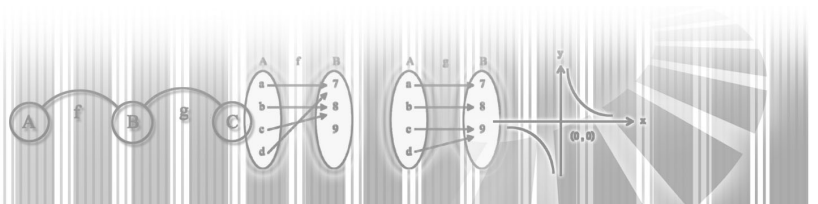
$$r_4 = \{(2,1), (3,1), (4,2), (5,3)\}$$

$$r_5 = \{(2,3), (3,4), (3,5), (2,5)\}$$

r_1, r_2, r_4 เป็นฟังก์ชัน

r_3, r_5 ไม่เป็นฟังก์ชัน

- ให้นักเรียนหาลักษณะร่วมของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน และความแตกต่างของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน



4. ครูและนักเรียนสรุปความหมายของฟังก์ชัน
5. ครูกำหนดความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขต่อไปนี้
 1. $r_1 = \{(x, y) / y = x^2\}$
 2. $r_2 = \{(x, y) / y = 2x + 1\}$
 3. $r_3 = \{(x, y) / y = x^3\}$
 4. $r_4 = \{(x, y) / y = |x|\}$
 5. $r_5 = \{(x, y) / x = y^2\}$
 6. $r_6 = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$

แล้วให้นักเรียนแบ่งความสัมพันธ์ออกเป็น 2 กลุ่ม โดยให้บอกเกณฑ์ที่ใช้ในการแบ่งความสัมพันธ์ ในขณะที่ทำกิจกรรมครูอาจแนะนำให้นักเรียนแบ่งความสัมพันธ์เป็น 2 กลุ่ม คือ ความสัมพันธ์ในข้อ 1, 2, 3, 4 กับความสัมพันธ์ในข้อ 5, 6

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปลักษณะของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน
7. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 6
8. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 6

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 6
2. ใบกิจกรรมที่ 6
3. ห้องสมุด โรงเรียน

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

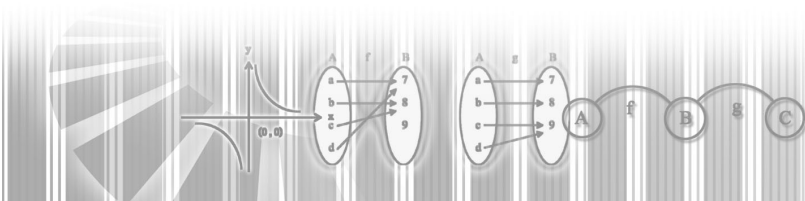
.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 6

แนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ให้พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

ให้ r_1 คือความสัมพันธ์ของจำนวนฉบับของลอตเตอรี่ และราคาขายต่อฉบับของพ่อค้าขายปลีกคนหนึ่ง

$$r_1 = \{(1,45), (1,50), (2,90), (2,100), (3,135), (3,150), (4,180), (4,200)\}$$

r_2 คือความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนแผ่นของการสำเนาเอกสารและค่าสำเนาราคา (บาท) ต่อจำนวนแผ่น ดังตารางต่อไปนี้

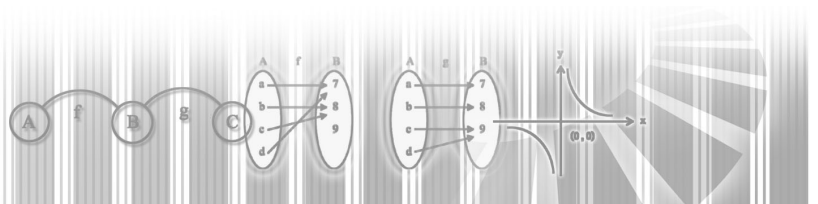
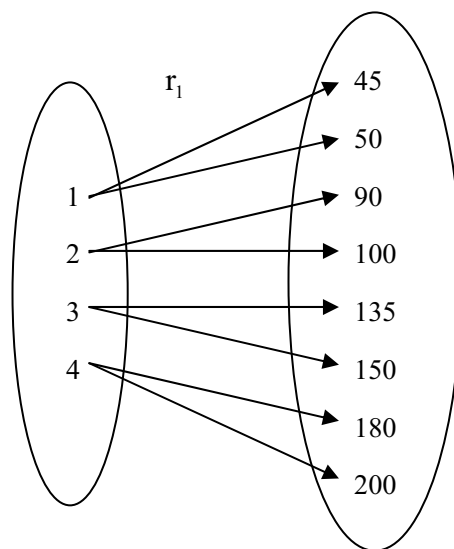
จำนวนแผ่น	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	100
ราคา(บาท)	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	...	50.00

$$\text{จะได้ } r_2 = \{(1,0.50), (2,1.00), (3,1.50), (4,2.00), \dots, (100,50.00)\}$$

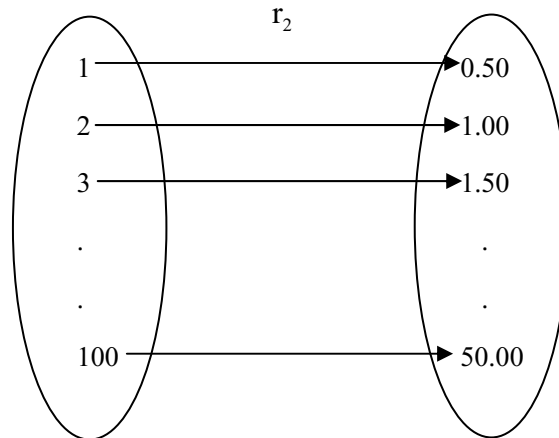
เขียนข้อมูลจากตารางเป็นเซตแบบบอกเงื่อนไข ได้ดังนี้

$$r_2 = \{(x, y) \in I^+ \times R^+ / y = 0.50x\}$$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ r_1 จะเห็นว่าราคาของลอตเตอรี่ของพ่อค้าขายปลีกคนนั้นฉบับละ 45 บาทบ้าง 50 บาทบ้าง จะเห็นว่ามีความสัมพันธ์เช่น $(1, 45)$ และ $(1, 50)$ อยู่ใน r_1 ซึ่งทั้งสองอันดับนี้มีสมาชิกตัวหน้าเท่ากันคือ 1 แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันคือ 45 และ 50 ในทำนองเดียวกันสำหรับคู่อันดับอื่นๆ
พิจารณาแผนภาพของ r_1

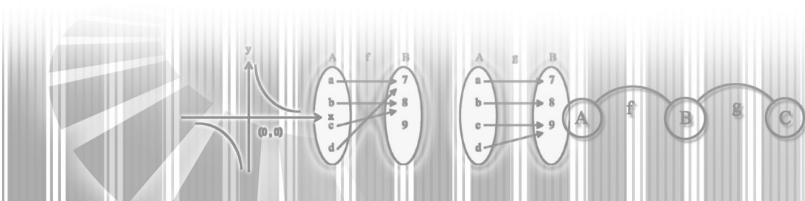


จากแผนภาพ r_1 จะเห็นว่า มีสมาชิกตัวหน้าบางตัวจับคู่กับสมาชิกตัวหลังมากกว่าหนึ่งตัว เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ r_2 จะเห็นว่าทุกคู่อันดับที่อยู่ใน r_2 มีตัวหน้าต่างกัน
พิจารณาแผนภาพของ r_2



ลักษณะของความสัมพันธ์ r_2 เป็นฟังก์ชัน แต่ความสัมพันธ์ r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม ฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ ถ้าคู่อันดับสองคู่ใดๆ มีสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับนั้นต้องไม่ต่างกัน



ใบกิจกรรมที่ 6

1. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $\{(1,2), (2,3), (3,4), (5,6)\}$ ตอบ.....
2. $\{(1,2), (3,4), (3,7), (4,3)\}$ ตอบ.....
3. $\{(2,4), (3,4), (3,4), (5,6)\}$ ตอบ.....
4. $\{(2,4), (4,6), (6,8), (7,8)\}$ ตอบ.....
5. $\{(2,1), (3,1), (5,1), (-1,1)\}$ ตอบ.....

2. ให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $\left\{ (x,y) / y = \frac{1}{x} \right\}$ ตอบ.....
2. $\left\{ (x,y) / x = y^2 + 1 \right\}$ ตอบ.....
3. $\left\{ (x,y) / y = x^2 - 5 \right\}$ ตอบ.....
4. $\left\{ (x,y) / x = y^2 \right\}$ ตอบ.....
5. $\left\{ (x,y) / y = \frac{1}{x+1} \right\}$ ตอบ.....
6. $\left\{ (x,y) / y = \sqrt{2-x} \right\}$ ตอบ.....
7. $\left\{ (x,y) / x = y^2 + 2x \right\}$ ตอบ.....

3. ให้นักเรียนสรุปความหมายของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันและความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

.....

.....

.....

.....

.....

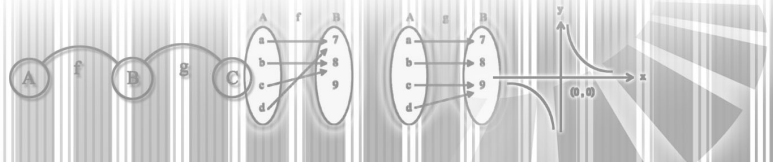
.....

.....

.....

.....

.....



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง ลักษณะของฟังก์ชัน
วิชา คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

สามารถบอกลักษณะของฟังก์ชันชนิดต่างๆ ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของคำว่า “ฟังก์ชันจาก A ไป B” ได้
2. บอกความหมายของคำว่า “ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B” ได้
3. บอกความหมายของคำว่า “ฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R” ได้
4. บอกความหมายของคำว่า “ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง” ได้

2. แนวความคิดหลัก

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของ f เท่ากับ B

3. เนื้อหาสาระ

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมนและมีสับเซตของ B เป็นเรนจ์

 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมนและ B เป็นเรนจ์ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

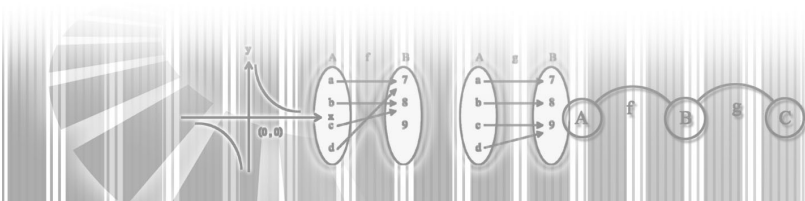
บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งถ้า $y \in R_f$ แล้วมี $x \in D_f$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $(x,y) \in f$

 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันเราสามารถเขียน $y = f(x)$ แทน $(x,y) \in f$ ได้ เรียก $f(x)$ ว่าฟังก์ชัน f ที่ x หรือ เอฟเอ็กซ์

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อสำหรับ x_1, x_2 ในโดเมน

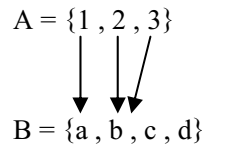
ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ 

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนทบทวนความรู้เรื่อง โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
2. ครูสรุปว่าความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน โดเมนของความสัมพันธ์จะเรียกว่า โดเมนของฟังก์ชัน และเรนจ์ของความสัมพันธ์จะเรียกว่า เรนจ์ของฟังก์ชัน
3. ครูกำหนดโจทย์ต่อไปนี้ให้นักเรียนหา โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

$$A = \{1, 2, 3\}$$

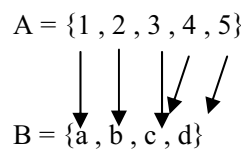
$$B = \{a, b, c, d\}$$



คำตอบ โดเมนคือ A เรนจ์คือ $\{a, b\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

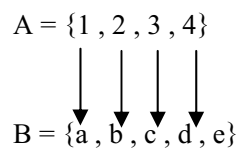
$$B = \{a, b, c, d\}$$



คำตอบ โดเมนคือ A เรนจ์คือ B

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

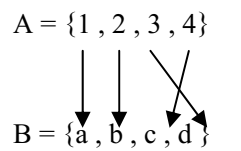
$$B = \{a, b, c, d, e\}$$



คำตอบ โดเมนคือ A เรนจ์คือ $\{a, b, c, d\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$



คำตอบ โดเมนคือ A เรนจ์คือ B

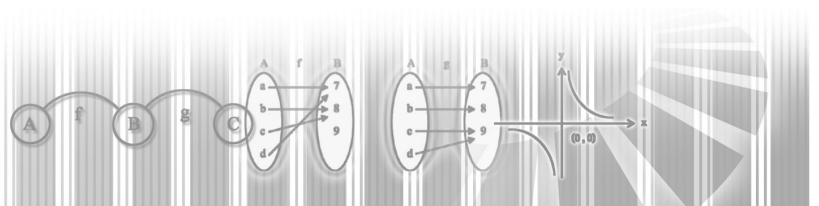
4. จากโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณาการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซต A และสมาชิกของเซต B และบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปให้ได้ว่า โดเมนของฟังก์ชันคือเซต A และเรนจ์ของฟังก์ชันเป็นสับเซตของเซต B ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันจาก A ไป B และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f: A \rightarrow B$

7. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 7
8. ให้นักเรียนฝึกทักษะโดยทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 7

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 7
2. ใบกิจกรรมที่ 7
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. Internet



6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

.....

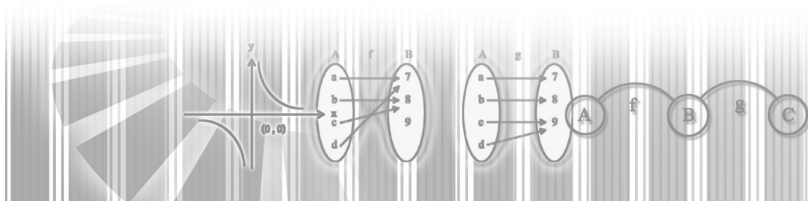
.....

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 7

ฟังก์ชันไปทั่วถึง

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หมายถึง โดเมนของ f คือ A และเรนจ์ของ f เป็นสับเซตของ B

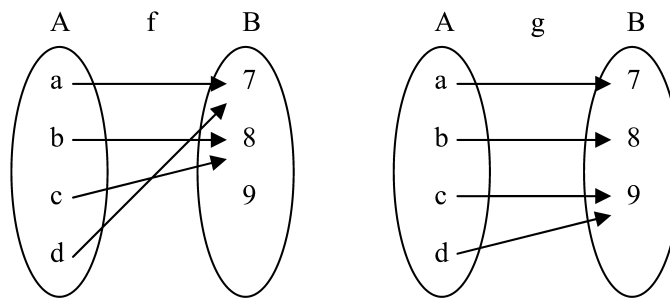
กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $B = \{7, 8, 9\}$

$f = \{(a, 7), (b, 8), (c, 8), (d, 7)\}$

$g = \{(a, 7), (b, 8), (c, 9), (d, 9)\}$

จะเห็นว่าทั้ง f และ g ต่างก็เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (เพราะโดเมนของ f และ g เท่ากับ A และเรนจ์ของ f และ g เป็นสับเซตของ B) เรนจ์ของ f ไม่เท่ากับ B เรียกฟังก์ชันที่มีสมบัติเช่นเดียวกับ g นี้ว่า ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

พิจารณาแผนภาพของฟังก์ชัน f และ g ดังนี้



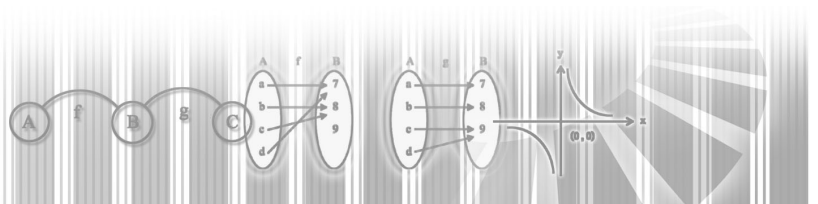
จะเห็นว่า เรนจ์ของ g คือ B และ เรนจ์ของ f เท่ากับ B

บทนิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B

บทนิยาม กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือ A และเรนจ์เท่ากับ B

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{ทั่วถึง}} B$

ถ้าเรนจ์ของ f ไม่เท่ากับ B กล่าวว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = |x| + 3$ จงแสดงว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

แนวคิด ให้พิจารณาเรนจ์ของ f ว่าเป็นจำนวนจริง \mathbb{R} หรือไม่ ถ้าไม่ใช่ แสดงว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

วิธีทำ เนื่องจาก $|x| \geq 0$ บทนิยามของค่าสมบูรณ์
ดังนั้น $|x| + 3 \geq 3$ โดยการนำ 3 ไปบวกทั้งสองข้าง

จะเห็นว่า $f(x) \geq 3$

นั่นคือเรนจ์ของ f เป็นเซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 ซึ่งไม่ใช่ \mathbb{R}

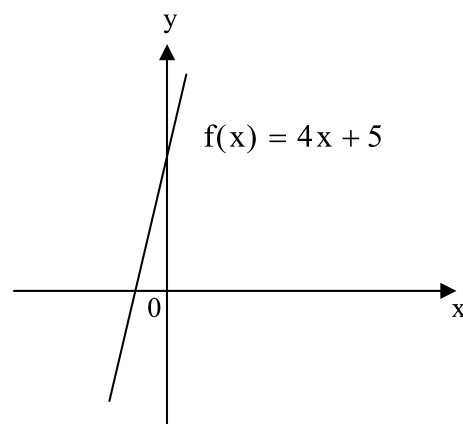
จะได้ว่าเรนจ์ของ f คือ $[3, \infty)$

ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

ข้อสังเกต จากตัวอย่างจะเห็นว่าเรนจ์ของ f คือ $[3, \infty)$ เป็นสับเซตของ \mathbb{R}

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 4x + 5$ f เป็นฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R} หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 4x + 5$



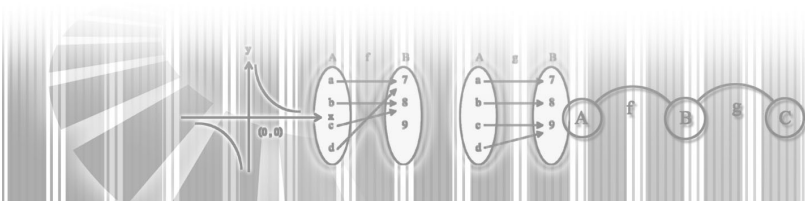
จะได้ว่า โดเมนของ f คือเซตของจำนวนจริง \mathbb{R}

เรนจ์ของ f คือเซตของจำนวนจริง \mathbb{R}

สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

ข้อสังเกต ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

จะเป็นฟังก์ชันจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R} เสมอ

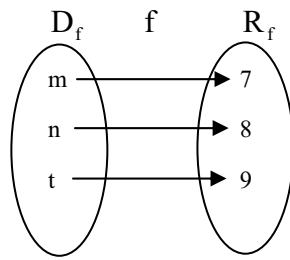


ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

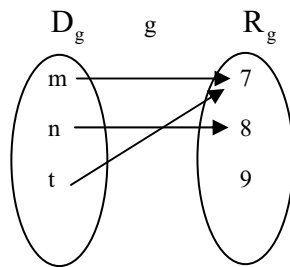
กำหนดให้ $f = \{(m,7), (n,8), (t,9)\}$

และ $g = \{(m,7), (n,8), (t,7)\}$

จะเห็นว่า f และ g ต่างก็เป็นฟังก์ชัน ยิ่งไปกว่านั้นฟังก์ชัน f มีสมาชิกตัวหลังหนึ่งตัว จับคู่กับสมาชิกตัวหน้าเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น ดังรูป



ส่วนฟังก์ชัน g มีสมาชิกตัวหลังหนึ่งตัวคือ 7 จับคู่กับสมาชิกตัวหน้าสองตัวคือ m และ t ดังรูป

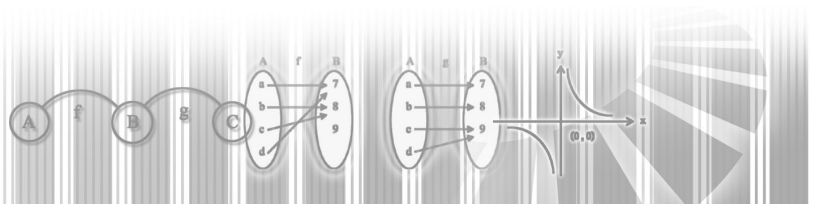


จะเห็นว่า f มีลักษณะของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ในขณะที่ g ไม่ใช่ลักษณะของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชัน

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B สำหรับสมาชิก x_1 และ x_2 ใดๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

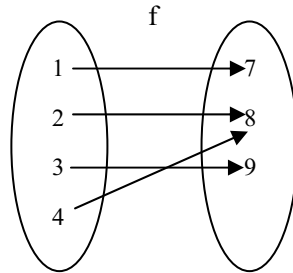
เขียนแทนด้วย $f; A \xrightarrow{1-1} B$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(1,7), (2,8), (3,9), (4,8)\}$

จงแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพของ $f = \{(1,7), (2,8), (3,9), (4,8)\}$



f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เนื่องจากมี $(2,8) \in f$ และ $(4,8) \in f$ ซึ่งสมาชิกตัวหลังคือ 8 เหมือนกันแต่สมาชิกตัวหน้าต่างกันคือ $2 \neq 4$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = |x| + 1$ จงแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

วิธีทำ การที่จะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 เราต้องหา x_1 และ x_2 ที่ x_1 ไม่เท่ากับ x_2 แต่ทำให้ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ มีค่าเท่ากัน

เลือก x_1 และ x_2 ที่มีค่าสมบูรณ์เท่ากัน เช่น $x_1 = 2$ และ $x_2 = -2$

ถ้า $x_1 = 2$ แล้ว $f(x_1) = f(2) = |2| + 1 = 2 + 1 = 3$

ถ้า $x_2 = -2$ แล้ว $f(x_2) = f(-2) = |-2| + 1 = 2 + 1 = 3$

จะเห็นว่า มีคู่อันดับ $(2,3)$ และ $(-2,3)$ อยู่ใน f แต่ $2 \neq -2$

ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1-1

ตัวอย่างที่ 5 จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เมื่อ $f(x) = 3x + 4$

วิธีทำ ให้ $f(x_1) = f(x_2)$

จะได้ว่า $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$

นำ -4 บวกทั้งสองข้าง

จะได้ $3x_1 + 4 + (-4) = 3x_2 + 4 + (-4)$

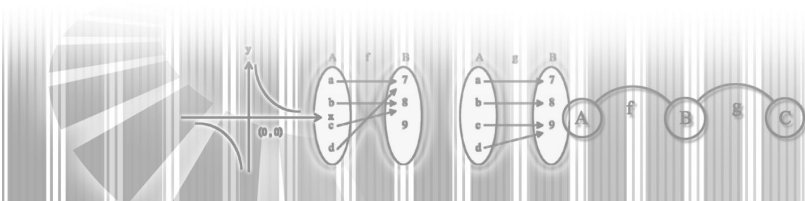
$$3x_1 = 3x_2$$

นำ $\frac{1}{3}$ คูณทั้งสองข้าง

จะได้ $x_1 = x_2$

จะเห็นว่า ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1



ใบกิจกรรมที่ 7

1. จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก R ไปทั่วถึง R

1. $f(x) = 9x + 4$
2. $f(x) = 3|x| + 2$
3. $f(x) = 4x^2 - 1$
4. $f(x) = -7x + 1$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = x^2 + 2x + 5$
7. $f(x) = 3$
8. $f(x) = x^2, x < 0$
9. $f(x) = \frac{1}{x}$
10. $f(x) = |x|$

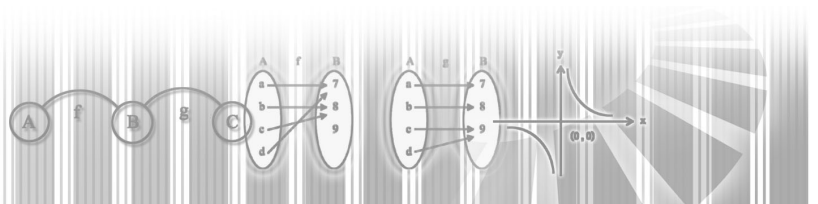
2. จงเขียนเครื่องหมาย \checkmark หน้าข้อที่ถูก และ \times หน้าข้อที่ผิด

กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ และ $C = \{4,5,6\}$

-1) $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
2) $\{(1,4),(2,5),(3,5)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง C
3) $\{(1,4),(2,4),(3,5)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B
4) $\{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง C

3. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชัน 1-1

- 1) $f(x) = x$
- 2) $f(x) = x^2 + 1$
- 3) $f(x) = x - 5$
- 4) $f(x) = 3x - 2$
- 5) $f(x) = |x - 1|$
- 6) $f(x) = \frac{1}{x}$
- 7) $f(x) = x^4$
- 8) $f(x) = -x^2$
- 9) $f(x) = x^3$
- 10) $f(x) = -|x|$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง ฟังก์ชันประกอบ
วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

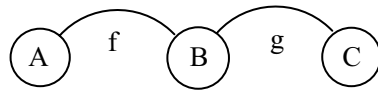
สามารถหาฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันประกอบได้
2. บอกได้ว่าจะหาฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้หรือไม่
3. หาฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันประกอบที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

$g \circ f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่สร้างขึ้นใหม่ เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปเซต C โดย โดเมนมาจาก A และเรนจ์มาจาก C

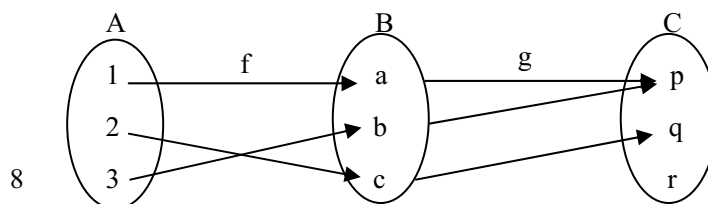


3. เนื้อหาสาระ

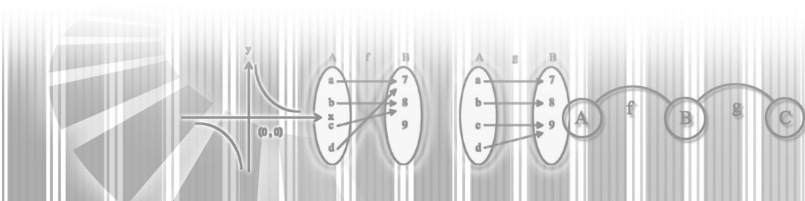
นิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ กำหนดโดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก x ซึ่ง $f(x) \in D_g$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนทบทวนการหาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$
2. ครูกำหนดแผนภาพ ฟังก์ชัน f และ g โดยใช้แผ่นโปรงใส ดังรูป



3. จากแผนภาพจะได้ $f(1) = a, f(2) = c, f(3) = b$
 $g(a) = p, g(b) = p, g(c) = q$
 $g \circ f(1) = p, g \circ f(2) = p, g \circ f(3) = q$



จาก f และ g ที่กำหนดให้จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = p$$

$$g(f(2)) = g(c) = q$$

$$g(f(3)) = g(b) = p$$

4. อาจสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่เรียกว่าฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ (จีโอเอฟ) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

$$(g \circ f)(1) = g(f(1))$$

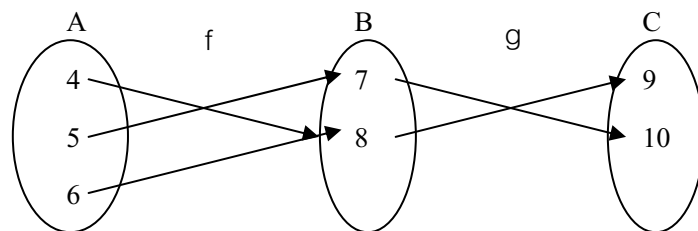
$$(g \circ f)(2) = g(f(2))$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3))$$

นั่นคือ $g \circ f = \{(1,p),(2,q),(3,p)\}$

5. ครูกำหนดแผนภาพฟังก์ชัน f และ g ให้นักเรียนหา $g \circ f$

โจทย์ตัวอย่าง



จะได้ $g \circ f = \{(4,9),(5,10),(6,9)\}$

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของคำว่าฟังก์ชันประกอบ

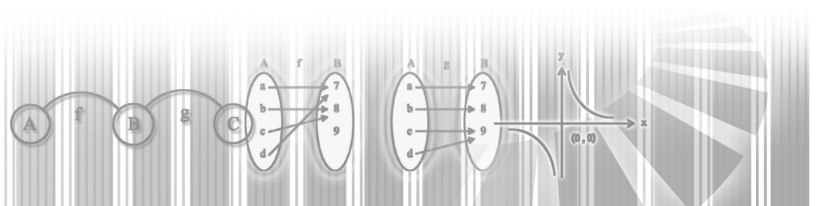
7. ครูและนักเรียนทบทวนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

8. จากโจทย์ตัวอย่างในข้อ 2 และ 5 ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f และ g แล้วช่วยกันพิจารณาว่าโดเมนของ $g \circ f$ เป็นอย่างไร

9. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่าจะหาฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างไร

10. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 8

11. ให้นักเรียนฝึกทักษะโดยทำแบบฝึกหัดในใบกิจกรรมที่ 8



5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 8
2. ใบกิจกรรมที่ 8
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. สืบค้นทาง Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

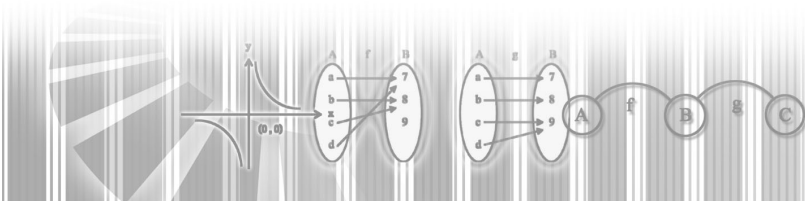
.....

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 8

ฟังก์ชันประกอบ

ถ้ามีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชัน เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้อีกนอกเหนือจากการบวก ลบ คูณ หรือหารฟังก์ชัน คือการนำฟังก์ชันมาประกอบกันด้วยเงื่อนไขที่กำหนดให้ ฟังก์ชันใหม่ที่ได้คือ ฟังก์ชันประกอบ ซึ่งฟังก์ชันประกอบนี้จะมีบทบาทสำคัญในเรื่องการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่

บทนิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันประกอบของ f และ g

เป็นฟังก์ชันจาก $\{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$ ไปยังเรนจ์ของ g และ $(x, z) \in \text{gof}$ ก็ต่อเมื่อมี y ซึ่ง $(x, y) \in f$ และ $(y, z) \in g$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(a,1), (b,2), (c,5)\}$
 $g = \{(1,7), (2,8), (3,9)\}$
 เนื่องจาก $(a,1) \in f$ และ $(1,7) \in g$ ดังนั้น $(a,7) \in \text{gof}$
 $(b,2) \in f$ และ $(2,8) \in g$ ดังนั้น $(b,8) \in \text{gof}$
 ส่วน $(c,5) \in f$ แต่ไม่มีคู่อันดับที่มี 5 เป็นพิกัดแรกของ g ดังนั้นจึงไม่พิจารณา
 จะได้ว่า $\text{gof} = \{(a,7), (b,8)\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2 - 2$

จงหา D_{gof} , D_{fog} , $(\text{gof})(x)$ และ $\text{fog}(x)$

วิธีทำ พิจารณา D_{gof} และ D_{fog}

จากบทนิยาม $D_{\text{gof}} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

ในที่นี้ $D_f \in \mathbb{R}$ และ $D_g \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $D_{\text{gof}} = \{x \in \mathbb{R} / 2x + 1 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}$

และ $D_{\text{fog}} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R}$

เนื่องจากมี D_{gof} และ D_{fog} ดังนั้นมี gof และ fog

พิจารณา $(\text{gof})(x) = g(f(x))$

$= g(2x + 1)$ เพราะ $f(x) = 2x + 1$

$= (2x + 1)^2 - 2$ เพราะ $g(x) = x^2 - 2$ หรือ

$g(A) = A^2 - 2$ เมื่อ $A = 2x + 1$

$= (4x^2 + 4x + 1) - 2$

$= 4x^2 + 4x - 1$

พิจารณา $(\text{fog})(x) = f(g(x))$

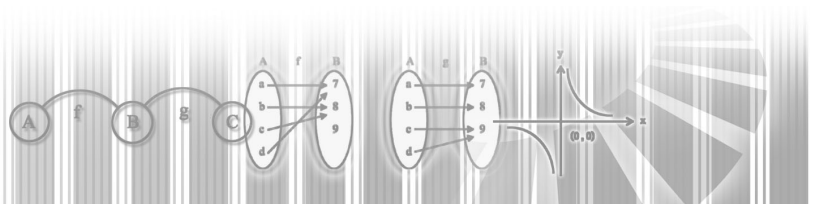
$= f(x^2 - 2)$ เพราะ $g(x) = x^2 - 2$

$= 2(x^2 - 2) + 1$ เพราะ $f(x) = 2x + 1$ หรือ

$f(A) = 2A + 1$ เมื่อ $A = x^2 - 2$

$= (2x^2 - 4 + 1)$

$= 2x^2 - 3$



ใบกิจกรรมที่ 8

1. สำหรับฟังก์ชัน f และ g ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อจงหา $D_{f \circ g}$, $D_{g \circ f}$, $f \circ g$ และ $g \circ f$

1) $f = \{(1,1), (2,4), (3,9)\}$

$g = \{(1,5), (4,8), (9,2)\}$

2) $f(x) = x^2$

$g(x) = x + 3$

3) $f(x) = x^2 - 2$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$

4) $f(x) = 5x^2 - 2x - 2$

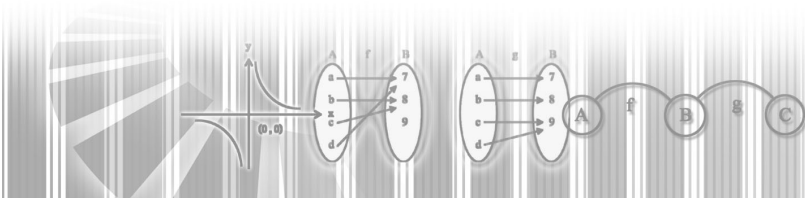
$g(x) = \sqrt{x-1}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา $f \circ f$

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 6-x & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$

$g(x) = x^2 + 1$ เมื่อ $|x| \geq 2$

จงพิจารณาว่ามี $f \circ g$ หรือไม่ ถ้ามีจงหา $f \circ g$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์

เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาฟังก์ชันอินเวอร์สและเขียนกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาอินเวอร์สของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. บอกความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์สได้
3. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่
4. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สได้
5. เขียนกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สได้

2. แนวความคิดหลัก

ถ้ากำหนดฟังก์ชันให้สามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้ แต่อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป จะเรียกอินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Function)

3. เนื้อหาสาระ

ถ้ากำหนดฟังก์ชันให้สามารถหาอินเวอร์สของฟังก์ชันได้ แต่อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป จะเรียกอินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส (Inverse Function)

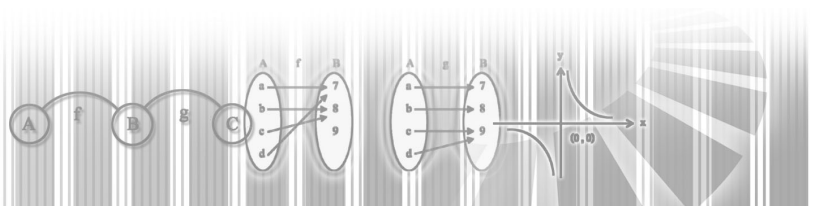
ทฤษฎีบท ให้ f เป็นฟังก์ชัน f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนทบทวนอินเวอร์สของความสัมพันธ์
2. ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนหาอินเวอร์ส

$$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$$



$$g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$$

$$\text{จะได้ } g^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,3)\}$$

$$h = \{(1,2),(3,2),(4,1)\}$$

$$\text{จะได้ } h^{-1} = \{(2,1),(2,3),(1,4)\}$$

3. จากโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณาว่าอินเวอร์สของ f , g และ h เป็นฟังก์ชันหรือไม่
4. ครูบอกว่า f^{-1} เรียกฟังก์ชันอินเวอร์ส
5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส
6. ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนพิจารณา เช่น

$$f = \{(3,2),(4,3),(5,1)\}$$

$$g = \{(4,1),(5,3),(6,2)\}$$

$$h = \{(2,3),(3,5),(4,1)\}$$

จากโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ฟังก์ชันใดที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส
7. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่าฟังก์ชันที่มีลักษณะอย่างไรที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส
8. ครูและนักเรียนทบทวนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
9. ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่าง

$$f = \{(3,2),(4,3),(5,1)\}$$

$$g = \{(4,1),(5,3),(6,2)\}$$

จากโจทย์ตัวอย่างให้นักเรียนหาอินเวอร์ส

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(2,3),(3,4),(1,5)\}$$

$$g^{-1} = \{(4,1),(5,3),(6,2)\}$$

10. ให้นักเรียนช่วยกันหาโดเมนและเรนจ์

$$\text{จะได้ } D_f = \{3,4,5\} \text{ และ } D_{f^{-1}} = \{1,2,3\}$$

$$R_f = \{1,2,3\} \text{ และ } R_{f^{-1}} = \{3,4,5\}$$

11. จากข้อ 10 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป

$$\text{จะได้ } D_f = R_{f^{-1}} \text{ และ } R_f = D_{f^{-1}}$$

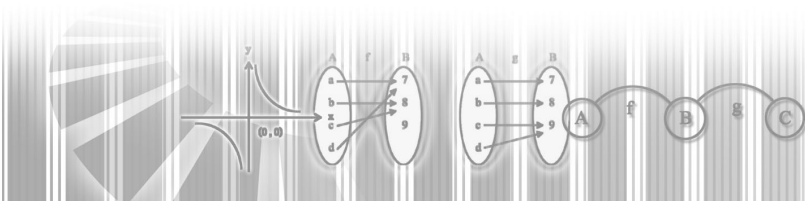
12. ครูและนักเรียนทบทวนกราฟของความสัมพันธ์

ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่าง เช่น

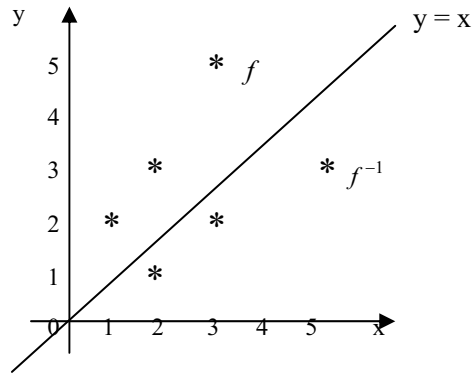
$$f = \{(1,2),(2,3),(3,5)\}$$

ให้นักเรียนหา f^{-1}

$$\text{จะได้ } f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(5,3)\}$$



ให้นักเรียนเขียนกราฟของ f และ f^{-1} ลงบนระนาบพิกัดฉากจะได้ดังรูป



13. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 9
14. ฝึกทักษะ โดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 9

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 9
2. ใบกิจกรรมที่ 9
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. สืบค้นจาก Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

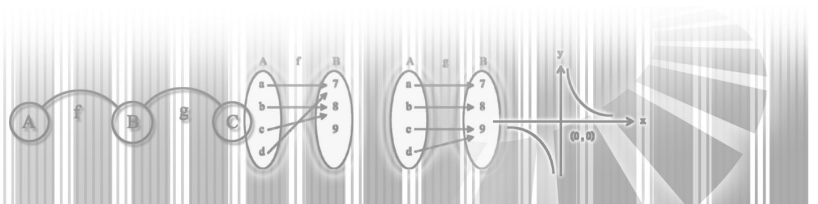
.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

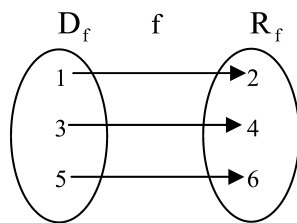


ใบความรู้ที่ 9

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

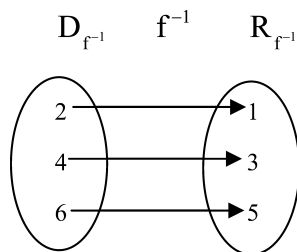
ให้ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้าเราสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของทุกๆ คู่ อันดับของฟังก์ชัน f จะได้ความสัมพันธ์ใหม่ เรียกว่า อินเวอร์สของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย f^{-1} ซึ่งความสัมพันธ์ใหม่นี้อาจเป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้ ถ้าอินเวอร์สของฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน เราเรียกว่าฟังก์ชันอินเวอร์สของ f

เช่น ให้ $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ เป็นฟังก์ชัน



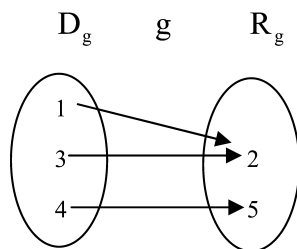
เมื่อสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของทุกๆ คู่ของ f จะได้

$$f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5)\}$$



จะเห็นว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน และฟังก์ชันใหม่นี้เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ f

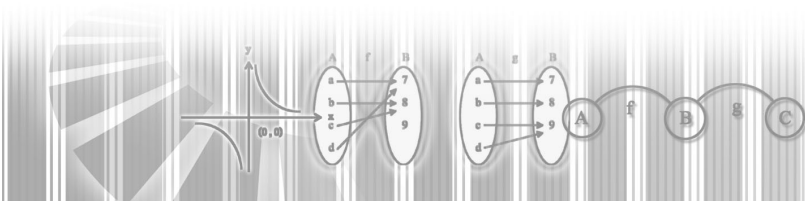
ให้ $g = \{(1,2), (3,2), (4,5)\}$ เป็นฟังก์ชัน



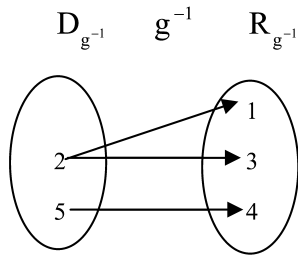
เมื่อสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของทุกๆ คู่ของ g จะได้

$$g^{-1} = \{(2,1), (2,3), (5,4)\}$$

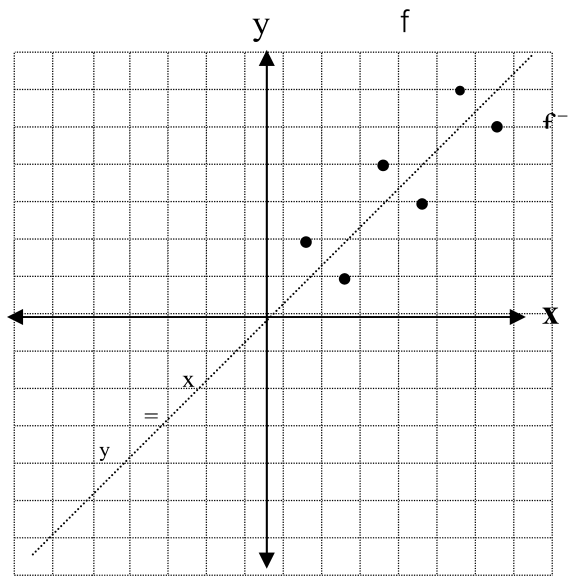
ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันเพราะมี $(2,1)$ และ $(2,3)$ อยู่ใน g^{-1}



แต่ $1 \neq 3$ ดังนั้น g^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ g

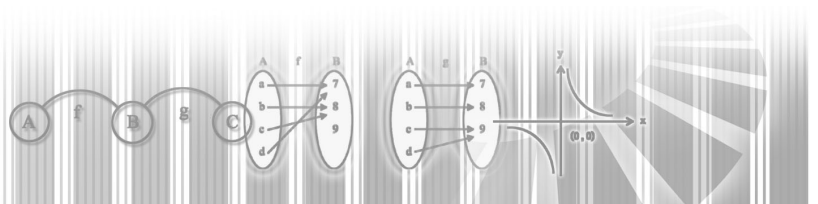


พิจารณากราฟของ $f = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ และ $f^{-1} = \{(2,1), (4,3), (6,5)\}$



ถ้าเราสะท้อนจุด $(1,2), (3,4)$ และ $(5,6)$ โดยมีเส้นตรง $y = x$ (เส้นตรงที่ทำมุม 45° กับแกน x) เป็นเส้นสะท้อนภาพจะได้จุด $(2,1), (4,3)$ และ $(6,5)$ ตามลำดับ ถ้าพับรูปตามแนวเส้นตรง $y = x$ จะได้ว่ากราฟของ f และกราฟของ f^{-1} ทับกันพอดี แสดงว่า เราสามารถหากราฟของ f^{-1} ได้โดยมีเส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อนภาพ

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ f จาก B ไปทั่วถึง A ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (y, x) เมื่อ $(x, y) \in f$



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ จงพิจารณาว่า f มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่
ถ้ามีจงหา f^{-1}

วิธีทำ $f(x) = 2x - 3$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์สของ f จาก \mathbb{R} ไปทั่วถึง \mathbb{R}

การหาฟังก์ชันอินเวอร์ส f^{-1} กระทำโดยสลับที่ x และ y ของฟังก์ชัน f เมื่อ $(x, y) \in f$

เนื่องจาก $f(x) = 2x - 3$

และ $y = f(x)$

จะได้ $y = 2x - 3$

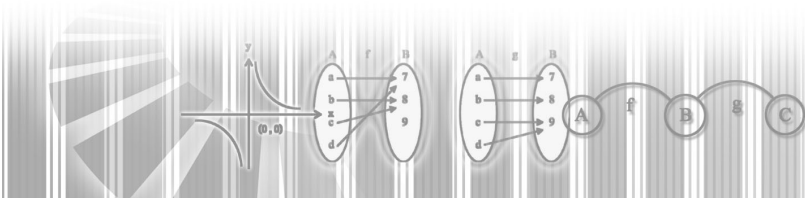
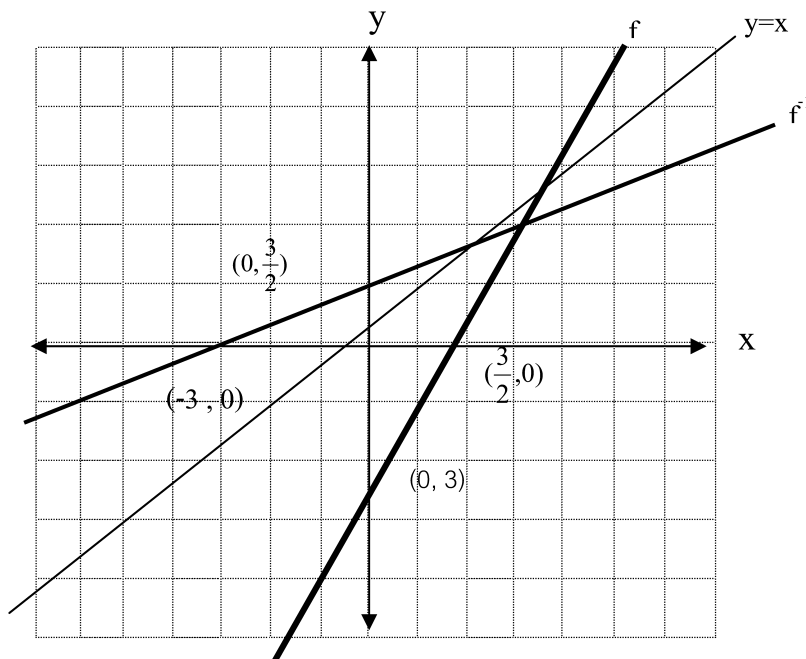
โดยการสลับที่ x และ y ในสมการ $y = 2x - 3$

จะได้ว่า $x = 2y - 3$

$$x + 3 = 2y$$

$$\frac{x + 3}{2} = y$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าเป็นจงหา f^{-1}

วิธีทำ พิจารณา $f(x) = x^2$

จะเห็นว่ามี $(-1,1) \in f$ และ $(1,1) \in f$

ดังนั้น $(1,-1) \in f^{-1}$ และ $(1,1) \in f^{-1}$

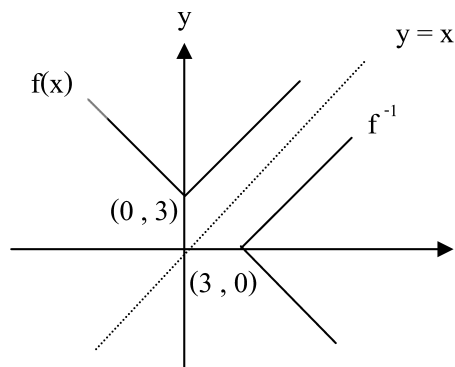
เพราะฉะนั้น f^{-1} ไม่ใช่ฟังก์ชัน

ข้อสังเกต จะเห็นว่าฟังก์ชัน f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และอินเวอร์สของฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน เราสามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ว่า

ถ้าฟังก์ชัน f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่าอินเวอร์สของฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = |x| + 3$ f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่

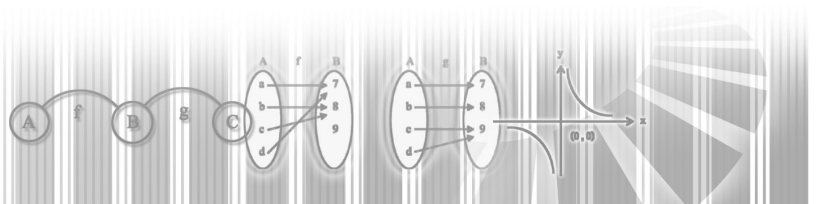
วิธีทำ พิจารณา $f(x) = |x| + 3$



f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะมี $(2,5) \in f$ และ $(-2,5) \in f$ แต่ $2 \neq -2$

ดังนั้น f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 ต่อ 1



ใบกิจกรรมที่ 9

1. กำหนดฟังก์ชัน f จงหาอินเวอร์สของฟังก์ชันต่อไปนี้พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. $f(x) = 5x + 1$

2. $f(x) = 3$

3. $f(x) = x^2 + 1$

4. $f(x) = (x - 2)^2$

5. $f(x) = 4 - 3x$

6. $f(x) = -\sqrt{x + 1}$

7. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

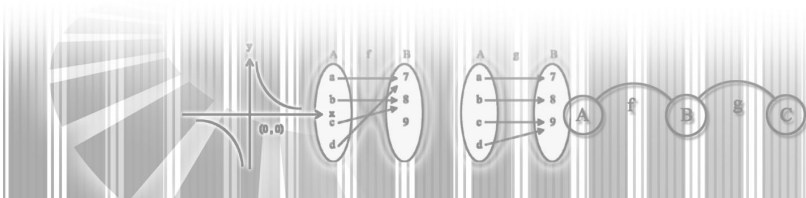
8. $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1$

9. $f(x) = \frac{3}{x}$

10. $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}, 0 \leq x \leq 4$

2. จากข้อ 1 อินเวอร์สของฟังก์ชันในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

ตอบ



3. กำหนดฟังก์ชัน f จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f ต่อไปนี้มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่ ถ้ามี จงหา $f^{-1}, D_f, R_f, D_{f^{-1}}$ และ $R_{f^{-1}}$

1. $f(x) = 2x - 3$

2. $f(x) = 3 - x$

3. $f(x) = x^2 - 9$

4. $f(x) = (x + 1)^2$

5. $f(x) = 3x^2$

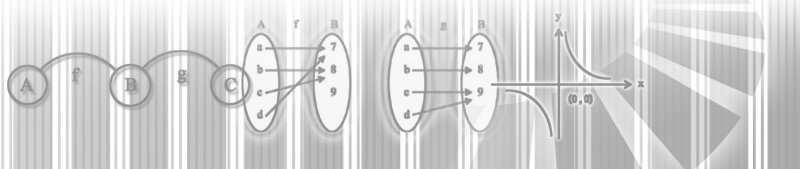
6. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

7. $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

8. $f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 0$

9. $f(x) = \frac{1}{x}$

10. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq x \leq 3$



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง ฟังก์ชันของฟังก์ชัน
 วิชา คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
 เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาฟังก์ชันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันของฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ฟังก์ชันขึ้นไป
2. หาฟังก์ชันที่เกิดจากการบวก ลบ ของฟังก์ชันได้
3. หาฟังก์ชันที่เกิดจากการคูณหาร ของฟังก์ชันได้
4. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันของฟังก์ชันได้

2. แนวความคิดหลัก

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่หนึ่งฟังก์ชันขึ้นไป เราอาจนำฟังก์ชันเหล่านี้มาสร้างฟังก์ชันใหม่ได้ โดยการนำค่าของฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน ซึ่งมีเงื่อนไขตามบทนิยาม

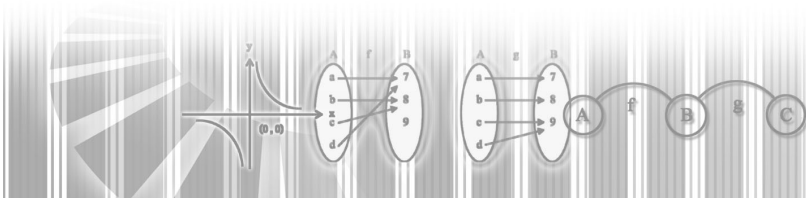
3. เนื้อหาสาระ

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่หนึ่งฟังก์ชันขึ้นไป เราอาจนำฟังก์ชันเหล่านี้มาสร้างฟังก์ชันใหม่ได้ โดยการนำค่าของฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน ซึ่งมีเงื่อนไขตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน นิยามฟังก์ชัน $f + g, f - g, f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ ดังนี้

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

โดยที่ทุกๆ สมาชิก x ในโดเมนของฟังก์ชันในข้อ 1 – ข้อ 3 นี้อยู่ทั้งในโดเมนของฟังก์ชัน f และ g นั่นคือทุกๆ สมาชิก $x \in D_f \cap D_g$



$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$

โดยที่ทุกๆ สมาชิก x ในโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ อยู่ทั้งในโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ที่ $g(x) \neq 0$ นั่นคือทุกๆ สมาชิก $x \in D_f \cap D_g - \{x \in / g(x) \neq 0\}$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนทบทวนค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

2. ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่าง

$$f = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$$

$$g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

จากโจทย์ตัวอย่าง จะได้

$$f(1) = 2 \qquad f(2) = 4 \qquad f(3) = 6$$

$$g(1) = 1 \qquad g(2) = 2 \qquad g(3) = 3$$

3. จากข้อ 2 ครูกำหนดให้ $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2+1 = 3$

ให้นักเรียนหา $(f+g)(2)$ และ $(f+g)(3)$

$$\text{จะได้ } f+g = \{(1,3), (2,6), (3,9)\}$$

4. ครูและนักเรียนสรุปความหมายของพีชคณิตของฟังก์ชัน

5. ครูและนักเรียนทบทวนความหมายของพีชคณิตของฟังก์ชัน

6. จากโจทย์ตัวอย่างข้อ 2 ครูให้นิยาม $f - g$

$$\text{จะได้ } f - g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

7. ครูกำหนดโจทย์ตัวอย่างเพิ่มเติมให้นักเรียนหา $f+g$ และ $f - g$

$$1. f = \{(2,4), (3,6), (4,8)\}$$

$$g = \{(2,3), (3,5), (4,6)\}$$

$$2. f = \{(1,3), (2,5), (3,7)\}$$

$$g = \{(1,2), (2,4), (3,2)\}$$

8. ครูและนักเรียนทบทวนการบวก ลบของฟังก์ชัน

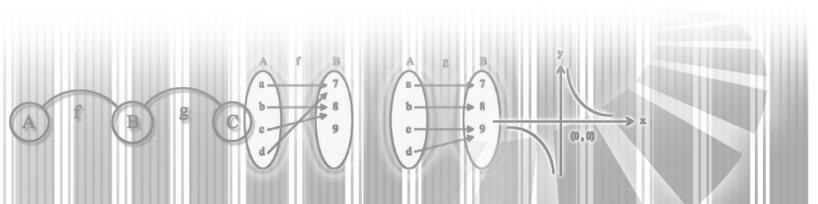
9. จากโจทย์ตัวอย่างข้อ 2 ครูให้นิยาม $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$

$$\text{จะได้ } f \cdot g = \{(1,2), (2,8), (3,18)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$$

10. สีกทักษะโดยให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในใบกิจกรรม

11. ครูและนักเรียนทบทวนพีชคณิตของฟังก์ชัน



ครูให้โจทย์ตัวอย่าง

$$f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,7)\}$$

$$g = \{(2,3), (3,1), (4,2), (5,3)\}$$

ให้นักเรียนหา $f + g$

$$\text{จะได้ } f + g = \{(2,7), (3,7), (4,9)\}$$

ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของ $f + g$

$$\text{จะได้ } D_{f+g} = \{2,3,4\} \text{ , } R_{f+g} = \{7,9\}$$

12. ให้นักเรียนศึกษาเพิ่มเติมจากใบความรู้ที่ 10

13. ฝึกทักษะให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากใบกิจกรรมที่ 10

5. แหล่งการเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 10
2. ใบกิจกรรมที่ 10
3. ห้องสมุดโรงเรียน
4. สืบค้นจาก Internet

6. กระบวนการวัดและประเมินผล

1. ประเมินผลจากการทำแบบฝึกหัด
2. ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบ

7. บันทึกหลังการสอน

.....

.....

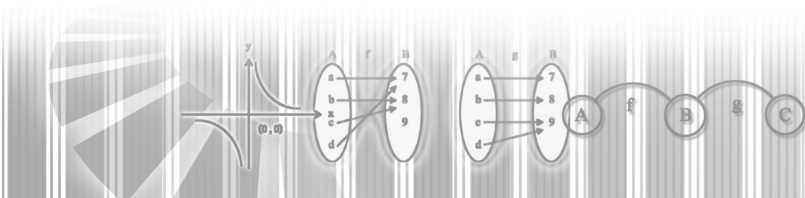
.....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....



ใบความรู้ที่ 10

พีชคณิตของฟังก์ชัน

ถ้ามีฟังก์ชันตั้งแต่หนึ่งฟังก์ชันขึ้นไป เราอาจนำฟังก์ชันเหล่านี้มาสร้างฟังก์ชันใหม่ได้ โดยการนำค่าของฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน ซึ่งมีเงื่อนไขตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน นิยามฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ ดังนี้

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2. (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

โดยที่ทุกๆ สมาชิก x ในโดเมนของฟังก์ชันในข้อ 1 – ข้อ 3 นี้อยู่ที่ทั้งในโดเมนของฟังก์ชัน

f และ g นั่นคือทุกๆสมาชิก $x \in D_f \cap D_g$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) \neq 0$$

โดยที่ทุกๆ สมาชิก x ในโดเมนของฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ อยู่ที่ทั้งในโดเมนของฟังก์ชัน

f และ g ที่ $g(x) \neq 0$ นั่นคือทุกๆสมาชิก $x \in D_f \cap D_g - \{x \in / g(x) \neq 0\}$

จากบทนิยาม จะเห็นว่าก่อนที่จะนำค่าของฟังก์ชันมาบวก ลบ คูณ หรือหารกัน เราจะต้องหาโดเมนของฟังก์ชันสองฟังก์ชันที่จะนำมาดำเนินการบวก ลบ คูณ หรือหารกันก่อน โดยนำเฉพาะสมาชิกที่ซ้ำกันมาเป็นสมาชิกของโดเมนของฟังก์ชันใหม่ สำหรับการหารฟังก์ชันนั้นมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า สมาชิกในโดเมนใหม่นั้นจะต้องไม่ทำให้ค่าของฟังก์ชันที่เป็นตัวหารเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 2$ และ $g(x) = \sqrt{x+1}$

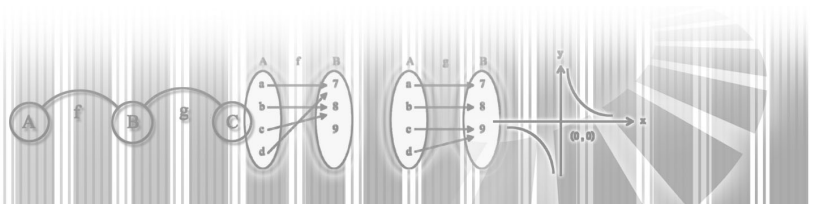
จงหา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

วิธีทำ พิจารณา $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

ดังนั้น $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$$

จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชันใหม่คือ $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$



พิจารณา $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 $= (x^3 + 2) + \sqrt{x + 1}$
 $= x^3 + 2 + \sqrt{x + 1}$

พิจารณา $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
 $= (x^3 + 2) - \sqrt{x + 1}$
 $= x^3 + 2 - \sqrt{x + 1}$

พิจารณา $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 $= (x^3 + 2) \sqrt{x + 1}$

พิจารณา $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$
 $= \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x + 1}}$ เมื่อ $x + 1 > 0$ หรือ $x > -1$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือ $\{x \in \mathbb{R} / x > -1\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 10}}$ และ $g(x) = \sqrt{2 - x}$ จงหา $(f + g)(x)$

วิธีทำ พิจารณา $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 10\}$

และ $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

จะได้ว่า $D_f \cap D_g = \emptyset$

เนื่องจาก D_f และ D_g ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย ดังนั้น $(f + g)(x)$ เท่ากับเซตว่าง

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ และ $g(x) = x^2$

จงหา $(f + g)(-1)$, $(f - g)(0)$, $(f \cdot g)(1)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $D_f = \mathbb{R}$ และ $D_g = \mathbb{R}$ ดังนั้น $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$

จะได้ว่า $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1)$

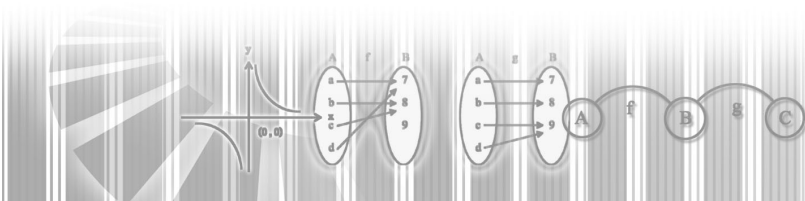
$$= -5 + 1$$

$$= -4$$

$$(f - g)(0) = f(0) - g(0)$$

$$= -3 - 0$$

$$= -3$$



$$\begin{aligned}(f \cdot g)(1) &= f(1) \cdot g(1) \\ &= (-1) \cdot 1 &= -1\end{aligned}$$

โดเมนของ $\frac{f}{g} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)(3) &= \frac{f(3)}{g(3)} \\ &= \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f = \{(1,2), (-1,3), (2,4), (4,3)\}$ จงหา $5f$

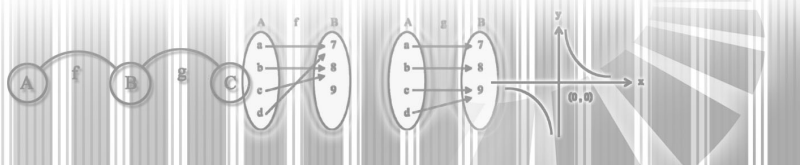
วิธีทำ พิจารณา $5f$

ฟังก์ชัน $5f$ มาจากฟังก์ชัน gf เมื่อ g คือฟังก์ชันคงตัว $g(x) = 5$

จะเห็นว่าโดเมนของ g คือเซตของจำนวนจริง \mathbb{R}

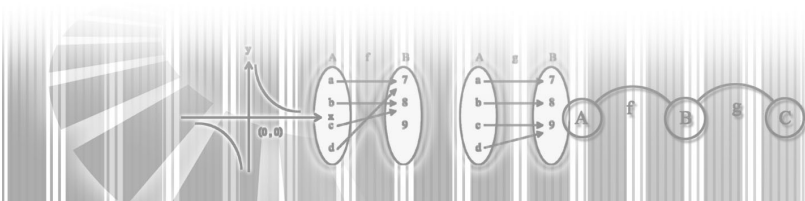
นั่นคือ $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{1, -1, 2, 4\} = \{1, -1, 2, 4\} = D_f$

ดังนั้น $5f = \{(1, 5 \times 2), (-1, 5 \times 3), (2, 5 \times 4), (4, 5 \times 3)\}$
 $= \{(1, 10), (-1, 15), (2, 20), (4, 15)\}$



ใบกิจกรรมที่ 10

- กำหนดให้ $f = \{(0,1), (1,3), (-2,0), (5,4)\}$
 $g = \{(-1,2), (0,-1), (-2,-3), (5,0)\}$
 จงหา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ และ $(-3)f$
- กำหนดให้ $f(x) = 5 - 3x$ และ $g(x) = x^2 - 1$
 จงหา $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเหล่านี้
- กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 + 5$ และ $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$
 จงหา $(f + g)(1)$, $(f \cdot g)(-2)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$
- กำหนดให้ $f(x) = 5 - 3x$ เมื่อ $-4 < x \leq 3$ และ $g(x) = x - 1$ เมื่อ $-2 \leq x < 5$
 จงหา $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
- กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4$ และ $g(x) = x + 2$
 จงหา $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$



ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

ดร.อำรุง จันทวานิช	เลขาธิการสภาการศึกษา
ดร.สิริพร บุญญานันต์	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำออง หิรัญบุรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขภักดิ์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	ที่ปรึกษาด้านระบบการศึกษา
ดร.จิรพรธณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นายธรรมนิศย์ ชำนาญกิจ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสรา รัตนเพชร	หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	
อาจารย์เอชส์วัฒน์ คำมณี	
อาจารย์สุจิตา มณีชัย	
คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้	
• โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย	จังหวัดสงขลา
• โรงเรียนมหาวชิราวุธ	จังหวัดสงขลา
• โรงเรียนบูรณะรำลึก	จังหวัดตรัง
• โรงเรียนจุฬารัตนราชวิทยาลัย	จังหวัดสตูล
• โรงเรียนสุราษฎร์ธานี	จังหวัดสุราษฎร์ธานี
• โรงเรียนพุนพิณพิทยาคม	จังหวัดสุราษฎร์ธานี
• โรงเรียนเตรียมอุดมภาคใต้	จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน : นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

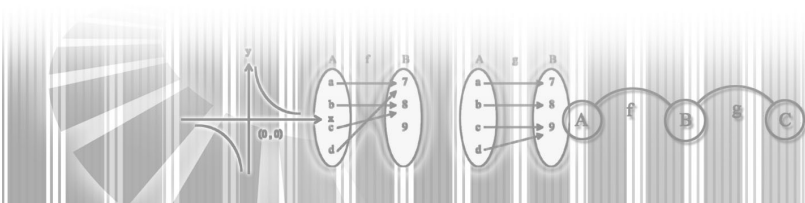
นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา	หัวหน้าโครงการ
นายวิษ ตาแก้ว	ประจำโครงการ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	ประจำโครงการ
นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา	ประจำโครงการ

บรรณาธิการ :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา
นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา

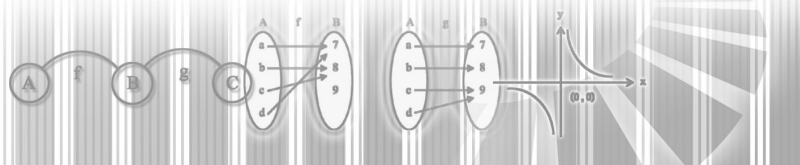
เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกึ่งกาญจน์ เมฆา



เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช่หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

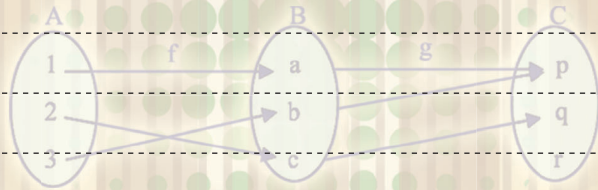
กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุขุทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : <http://www.onec.go.th>
<http://www.thaigifted.org>



บันทึก

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{a, b, c, d, e\}$$



$$r_3 = \{(x, y) \in I^+ \times R^+ / y = 0.50x\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$